گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایهٔ دوازدهم



پاییز ۱۴۰۵

$\frac{۱}{۸}$ نیم‌سال اول دوازدهم

$\frac{۱}{۵}$ پایهٔ دهم

دفترچه پاسخ

جمعه ۱۷ مهرماه ۱۴۰۵

ویژهٔ کنکـــوری‌های ۱۴۰۶

- پاسخنامه سریع؛ برای بررسی فوری بعد از آزمون
- تحلیل تمام گزینه‌های هر سؤال؛ برای بررسی سؤالاتی که پاسخ نادرست داده‌اید
- نکات و درسنامه‌های آموزشی؛ برای یادگیری کامل مباحث هر سؤال
- مشاورهٔ تستی؛ برای یادگیری انواع روش‌های حل تست
- استراتژی آزمون؛ برای یادگیری مدیریت زمان و مدیریت جلسهٔ آزمون

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	مهرداد کیوان حسین شفیع‌زاده رسول حاجی‌زاده	حسین شفیع‌زاده ـ مهرداد کیوان حسن محمدبیگی ـ کیوان دارابی	ندا فرهختی ـ مهرداد اسپیدکار مائده بادان‌فیروز ـ یزدان نیک‌قدم حمیدرضا ولی‌پور ـ ارسلان حسنوند علی اسدی
فیزیک	سجاد صادقی‌زاده سعید احمدی	سجاد صادقی‌زاده ـ سعید احمدی حسین عبدوی‌نژاد ـ محمدجواد سورچی غلامرضا محبی ـ مجید رجبی‌وندچالی مصطفی واثقی ـ محسن قندچلر ـ سینا محمدی	محمدجواد سورچی حنا خلعتبری
شیمی	فرشاد هادیان‌فرد	فرشاد هادیان‌فرد ـ فرهنگ امیری فاطمه محمودی ـ عالیه میرزایی طاها حق‌بین ـ علی ترابی مهسا بایمانی‌نژاد ـ محمد کهنه‌پوشی علیرضا ستوده ـ یاشار فیض‌اللهی	طاها حق‌بین محمدرضا جمشیدی محمد داودآبادی‌فراهانی مبیناسادات سیدحسینی امیرحسین مسلمی

یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوب‌تون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین.

راستی! حتماً در نظرسنجی آزمون شرکت کنین و نظرات و پیشنهادات‌تون رو برامون بنویسین.

سختی تصادفی بعضی دروس در آزمون های ماز

مازی عزیز!

سطح سؤالات کنکور همیشه قابل پیش‌بینی نیست؛ ممکنه بعضی درس‌ها سخت‌تر یا آسون‌تر از چیزی باشن که انتظار داری.

برای همین، توی بعضی آزمون‌های ماز، به صورت تصادفی و غیرقابل پیش‌بینی، گاهی بعضی درس‌ها رو سخت‌تر طراحی می‌کنیم.

چرا؟

که روز کنکور غافلگیر نشی!

چون توی آزمون ماز فقط نکات کنکور رو برات پیش‌بینی نمی‌کنیم؛ بلکه شرایط مختلف کنکور رو هم برات شبیه‌سازی می‌کنیم.

پس اگه با یه درس سخت توی آزمون ماز مواجه شدی، بدون که داریم برای روزی آماده‌ات می‌کنیم که ممکنه کنکور سخت‌تر از انتظار تو باشه.

باتشکر
واحد آزمون ماز

آموزش استراتژی آزمون و مدیریت جلسه کنکور

قسمت اول

راز فرمول جادویی ۳H در موفقیت تحصیلی!

سلام به روی ماهت رفیق!

از این به بعد، همراه هر آزمون یه مقاله استراتژی دستت می‌رسه. هدفمون خیلی ساده‌ست: «یاد بگیری چطوری یاد بگیری» و «یاد بگیری چطوری آزمون بدی»!

می‌دونیم همین الانشم درس می‌خونی و کلی بلدی؛ اما ماجرا مثل هیزم‌شکنیه که مدام تبر می‌زنه، بدون اینکه وقتی برای تیز کردن تیغه‌اش بذاره! ما با این مقاله‌ها قراره «ارّه‌ات رو تیزتر کنیم» تا با کمترین انرژی، عمیق‌ترین برش رو بزنی!

حالا بریم سراغ اصل داستان این مقاله: فرمول طلایی ۳H!

تا حالا فکر کردی چرا بعضیا روزی ۱۲ ساعت درس می‌خونن ولی تراز آزمونشون تکون نمی‌خوره؟ یا چرا بعضیا یه روز پرانرژی‌ان و سه روز بعدی کلاً غیبشون می‌زنه؟ جوابش توی تعادل نداشتن بین سه تا H سرنوشت‌سازه:

هارت (Heart - دل و انگیزه)

موتور محرکه توئه! اون چراییِ بزرگیه که باعث می‌شه صبح زود بیدار شی، با علاقه کتاب رو باز کنی و به هدفت ایمان داشته باشی.

هَند (Hand - دست و تلاش و عملکرد)

همون تست زدن، تمرین حل کردن و ساعت مطالعه واقعی و مفیدته. یعنی عمل‌گرایی خالص روی کاغذ!

هِد (Head - سر، استراتژی و متاروش ها)

یعنی تفکر، تکنیک، روش مطالعه درست، تحلیل آزمون، مدیریت زمان و برنامه‌ریزی هوشمندانه.

این سه تفنگدار چطور با هم دیالوگ دارن؟

این سه تا جزیره‌های جدا از هم نیستن؛ دقیقاً مثل یه چرخ‌دنده به‌هم‌پیوسته کار می‌کنن:

- وقتی هارت (انگیزه) داشته باشی هند (تلاشت) ناخودآگاه اوج می‌گیره و بیشتر می‌شه
- وقتی تلاشت زیاد شه و با هد (استراتژی درست) ترکیب بشه نتیجه آزمونت درخشان می‌شه.
- وقتی نتیجه خوب می‌گیری دوباره هارت (انگیزه و دوپامین مغزت) فوران می‌کنه و تلاشت مضاعف می‌شه!

اما نقطه خطر کجاست؟

«هارت» و «هند» بدون «هد»، یعنی تلاش بی‌استراتژی؛ «هد» بدون «هند» هم یعنی فکر بدون عمل. نتیجه وقتی میاد که هر سه باهم باشن!

ما توی این ۲۰ مقاله قراره چه کار کنیم؟

ما دقیقاً زوم کردیم روی H سوم، یعنی هِد (Head)!

انگیزه و انرژی اولیه رو تو با خودت بیار(البته یکی دو مقاله برای افزایش انگیزه داریما!)، تلاش و نشستن پای میز هم با خودت؛ ما بهت «استراتژی و ابزار مهندسی مطالعه» می‌دیم. قراره این H سوم رو طوری بهینه‌سازی کنیم که:

- مطالعه‌ات جوری عمیق و پربازده بشه که ۱ ساعت درس خوندنت، معادل ۳ ساعت بقیه ارزش داشته باشه.
- طوری با متد علمی برنامه‌ریزی کنی که قابل اجرا باشه، بهش برسی، تیک بخوره و حس کارآمدی و انگیزه‌ات بره سقف!
- و سر جلسه آزمون جوری مهارت‌های شناختی و مدیریت دفترچه‌ات رو پیاده کنی که حقِ تک‌تک تست‌هایی که زحمتش رو کشیدی، از طراح بگیری!

ارّه‌ات رو آماده کن رفیق، بازی هوشمندانه از همین امروز شروع شد!

SanjeshCloud

پاسخنامه کلیدی

ریاضیات

۱	۱	**۲**	۳	۴	۱۱	۱	۲	**۳**	۴
۲	**۱**	۲	۳	۴	۱۲	۱	۲	۳	**۴**
۳	۱	۲	۳	**۴**	۱۳	۱	**۲**	۳	۴
۴	۱	۲	۳	**۴**	۱۴	۱	۲	**۳**	۴
۵	۱	**۲**	۳	۴	۱۵	۱	**۲**	۳	۴
۶	۱	**۲**	۳	۴	۱۶	۱	۲	۳	**۴**
۷	۱	۲	۳	**۴**	۱۷	**۱**	۲	۳	۴
۸	۱	۲	**۳**	۴	۱۸	۱	**۲**	۳	۴
۹	۱	**۲**	۳	۴	۱۹	۱	۲	**۳**	۴
۱۰	۱	۲	**۳**	۴	۲۰	**۱**	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	**۳**	۴	۳۱	۱	۲	۳	**۴**
۲۲	**۱**	۲	۳	۴	۳۲	۱	**۲**	۳	۴
۲۳	**۱**	۲	۳	۴	۳۳	۱	۲	**۳**	۴
۲۴	۱	۲	۳	**۴**	۳۴	۱	**۲**	۳	۴
۲۵	**۱**	۲	۳	۴	۳۵	۱	۲	**۳**	۴
۲۶	۱	۲	**۳**	۴	۳۶	۱	**۲**	۳	۴
۲۷	۱	**۲**	۳	۴	۳۷	۱	۲	**۳**	۴
۲۸	۱	۲	**۳**	۴	۳۸	۱	۲	**۳**	۴
۲۹	۱	۲	۳	**۴**	۳۹	۱	۲	**۳**	۴
۳۰	۱	**۲**	۳	۴	۴۰	۱	۲	۳	**۴**

فیزیک

۴۱	۱	۲	۳	**۴**	۵۱	۱	۲	۳	**۴**
۴۲	۱	**۲**	۳	۴	۵۲	۱	۲	**۳**	۴
۴۳	۱	۲	**۳**	۴	۵۳	۱	۲	**۳**	۴
۴۴	۱	۲	۳	**۴**	۵۴	**۱**	۲	۳	۴
۴۵	**۱**	۲	۳	۴	۵۵	۱	۲	**۳**	۴
۴۶	۱	۲	**۳**	۴	۵۶	۱	**۲**	۳	۴
۴۷	۱	**۲**	۳	۴	۵۷	**۱**	۲	۳	۴
۴۸	**۱**	۲	۳	۴	۵۸	۱	۲	۳	**۴**
۴۹	۱	**۲**	۳	۴	۵۹	۱	**۲**	۳	۴
۵۰	**۱**	۲	۳	۴	۶۰	**۱**	۲	۳	۴

۶۱	**۱**	۲	۳	۴					
۶۲	۱	**۲**	۳	۴					
۶۳	۱	۲	۳	**۴**					
۶۴	۱	۲	۳	**۴**					
۶۵	۱	**۲**	۳	۴					

شیمی

۶۶	۱	**۲**	۳	۴	۷۶	۱	۲	۳	**۴**
۶۷	۱	۲	۳	**۴**	۷۷	۱	**۲**	۳	۴
۶۸	۱	۲	**۳**	۴	۷۸	**۱**	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	**۴**	۷۹	۱	**۲**	۳	۴
۷۰	۱	۲	۳	**۴**	۸۰	**۱**	۲	۳	۴
۷۱	۱	**۲**	۳	۴	۸۱	۱	۲	۳	**۴**
۷۲	۱	**۲**	۳	۴	۸۲	۱	۲	۳	**۴**
۷۳	۱	۲	**۳**	۴	۸۳	**۱**	۲	۳	۴
۷۴	**۱**	۲	۳	۴	۸۴	۱	۲	۳	**۴**
۷۵	۱	۲	**۳**	۴	۸۵	۱	۲	۳	**۴**

۸۶	۱	۲	**۳**	۴					
۸۷	۱	۲	۳	**۴**					
۸۸	۱	۲	**۳**	۴					
۸۹	**۱**	۲	۳	۴					
۹۰	۱	۲	۳	**۴**					
۹۱	۱	**۲**	۳	۴					
۹۲	۱	۲	۳	**۴**					
۹۳	۱	۲	۳	**۴**					
۹۴	۱	۲	۳	**۴**					
۹۵	۱	۲	۳	**۴**					

راهنمای پاسخنامه آزمون ها

زمان پاسخگویی:
سریع (زیر ۱ دقیقه) | استاندارد (۱-۲ دقیقه) | زمان‌بر (بیشتر از ۲ دقیقه).

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ خط به خط ـ سریع ـ صفحه ۱۶ ـ ۱۱۰۱)

سطح سؤال:
آسان (اعتمادبه‌نفس) | متوسط (محک جدی) دشوار (چالش رشد).

هشتگ سوال:
شماره درس + شماره پایه دسته‌بندی راحت‌تر سؤالات

سبک سؤال:
خط به خط (متن کتاب) | ترکیبی (چند مبحث) | محاسباتی (فرمول و دقت) | مفهومی (درک عمیق).

شماره صفحه:
منبع اصلی رو راحت پیدا کنید.

یادتون باشه:

- ✓ هر سؤال یک فرصت یادگیریه، نه یک مانع.
- ✓ پاسخ‌نامه فقط جواب نیست؛ یک کارگاه آموزشی کامله.
- ✓ با هر آزمون و مرور این پاسخ‌نامه، یک پله بالاتر می‌رید و یک قدم به رؤیاتون نزدیک‌تر می‌شید.
- ✓ موفقیت فقط برای کسایی‌یه که با برنامه و انگیزه حرکت می‌کنن. شما همون آدمید.

بودجه‌بندی این آزمون

حسابان ۲: تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲
ریاضی پایه: معادله، نامعادله و تعیین علامت + تابع، ریاضی ۱ صفحه‌های ۸۳ تا ۱۱۷ + حسابان ۱ صفحه‌های ۳۷ تا ۵۳
هندسه ۳: ماتریس و کاربردها (تا ابتدای ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی)، صفحه‌های ۹ تا ۱۷
هندسه پایه: ترسیم‌های هندسی و استدلال، هندسه ۱ صفحه‌های ۹ تا ۲۷
گسسته: آشنایی با نظریه اعداد (تا ابتدای اثبات‌های بازگشتی)، صفحه‌های ۱ تا ۶

سهم در کنکور

حسابان ۲: از این مبحث به‌طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است.
ریاضی پایه: از این مبحث به‌طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است.
هندسه ۳: این مبحث در مجموع ۱ تست کنکور را پوشش داده است.
هندسه پایه: از این مبحث به‌طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است.
گسسته: از این مبحث به‌طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است.

مازی‌های عزیز سلام!

این آزمون از دو بحث کلی تشکیل شده است. **تابع** و **تعیین علامت** و **حل نامعادله**. البته **تابع** اهمیت بیشتری دارد. اهمیت تابع بیشتر به لحاظ گستردگی آن است به طوری که در هر سه کتاب ریاضی ۱، حسابان ۱ و حسابان ۲ یک فصل را به خود اختصاص داده است. **تنوع** تست‌های تابع باعث شده این فصل برای شما عزیزان مقداری سخت جلوه کند، اما **حل تست‌های کنکور در رشتهٔ ریاضی و تجربی** در یک **دههٔ اخیر** می‌تواند تا قدری این مشکل را مرتفع کند. به **تمرین‌های کتاب** دقت بیشتری کنید چون در کنکور سال‌های اخیر بسیار زیاد از تمرین‌های کتاب استفاده شده است.

مهرداد کیوان ـ مسئول درس ریاضی آزمون‌های ماز

۱- اگر تابع $f(x)=a(۲-x)(x+۲)-bx^۲$ یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ صفر باشد، مقدار $\frac{a}{b}$ با فرض $b\neq ۰$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۱۰۹ ـ ۱۰۰۵)

ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم و در نهایت باید به تابع ثابت برسیم:

$$f(x)=a(۴-x^۲)-bx^۲=۴a-ax^۲-bx^۲$$

$$f(x)=۴a-(a+b)x^۲ \xrightarrow{f\text{ از درجهٔ صفر}} a+b=۰\Rightarrow a=-b\Rightarrow \frac{a}{b}=-۱$$

تابع چندجمله‌ای

توابع با ضابطهٔ $f(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_۱x+a_۰$ را **تابع چندجمله‌ای** از **درجهٔ n** می‌گویند.
بنابراین **توابع خطی** $f(x)=ax+b$ تابع **چندجمله‌ای از درجهٔ یک** و **تابع ثابت** $f(x)=k$ تابع **چندجمله‌ای از درجهٔ صفر** است.

۲- اگر f تابعی خطی باشد به‌طوری که $f(۳)=-۴$ و $f(-۴)=۳$، کدام تابع زیر یک تابع همانی است؟

۱) $y=f(x)-f(۲x)$ ۲) $y=f(x)+f(-۲x)$ ۳) $y=f(x)+f(۲x)$ ۴) $y=f(x)-f(-۲x)$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۱۱۰ ـ ۱۰۰۵)

چون تابع f **خطی** است فرض می‌کنیم به‌صورت $f(x)=ax+b$ باشد و $f(۳)=-۴$ و $f(-۴)=۳$ داریم:

$$\begin{cases}۳a+b=-۴\\-۴a+b=۳\end{cases}\Rightarrow a=-۱,b=-۱\Rightarrow f(x)=-x-۱$$

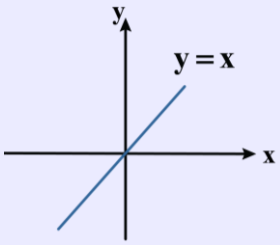
با توجه به ضابطهٔ به‌دست آمده و گزینه‌های داده‌شده داریم:

$$f(۲x)=-۲x-۱\Rightarrow f(x)-f(۲x)=-x-۱+۲x+۱=x$$

پس $f(x)-f(۲x)$ تابع **همانی** است.

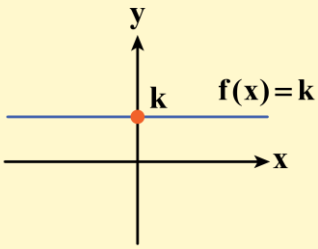
تابع همانی

تابعی است که ورودی و خروجی آن با هم **برابر** است. ضابطهٔ تابع همانی $f(x)=x$ بوده و نمودار آن **خط نیمساز ناحیهٔ اول و سوم مختصات یا بخشی از آن** است.



تابع ثابت

تابع ثابت تابعی است که به‌ازای **تمام ورودی‌های دامنه**، **یک مقدار** را به عنوان **خروجی** می‌دهد و ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=k\ ;k\in\mathbb{R}$ می‌باشد و **برد** آن **تک عضوی** $\{k\}$ است.



ماز

۳- اگر ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^۲+۳}+ax & |x|\le ۱\\ \frac{b}{x+۲}+۴ & |x|\ge ۱\end{cases}$ بیانگر یک تابع باشد، مقدار $f(a)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}+۲$ ۲) $۲+\sqrt{۷}$ ۳) $۲+\sqrt{۵}$ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۱۱۲ ـ ۱۰۰۵)

می‌دانیم یک ضابطه به شرطی تابع است که **عضوی دلخواه از دامنه** مانند x، فقط به **یک عضو** مانند y از **هم‌دامنه** متناظر شود. در این‌جا مقادیر $x=\pm ۱$ در هر دو ضابطه صدق می‌کنند پس باید مقادیر به‌دست آمده از هر دو ضابطه با هم **برابر** باشند:

$$\begin{cases}f(۱)=۲+a\\ f(۱)=\frac{b}{۳}+۴\end{cases}\Rightarrow a+۲=\frac{b}{۳}+۴\Rightarrow a-\frac{b}{۳}=۲$$

$$\begin{cases}f(-۱)=۲-a\\ f(-۱)=b+۴\end{cases}\Rightarrow ۲-a=b+۴\Rightarrow a+b=-۲$$

$$\begin{cases}a-\frac{b}{۳}=۲\\ a+b=-۲\end{cases}\xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم}}-\frac{۴}{۳}b=۴\Rightarrow\begin{cases}b=-۳\\ a=۱\end{cases}$$

پس:

$$f(a)=f(۱)=۲+a=۳$$

تابع چندضابطه‌ای یا قطعه‌ای

اگر یک رابطه برای بازه‌های متفاوت از x، فرمول‌های متفاوتی داشته باشد، زمانی این رابطه یک تابع را نشان می‌دهد که هر کدام از فرمول‌ها بتوانند ضابطهٔ یک تابع باشند و ثانیاً یا **اشتراک** محدوده‌های x، **تهی** باشد، یا اگر xای بین محدوده‌ها **مشترک** بود به‌ازای آن مقدار x، جواب‌های **یکسانی** در ضابطه‌ها به‌دست آید.

یه نمونهٔ باحال ببین!

کدام یک از روابط زیر یک تابع را نشان می‌دهد؟

الف) $y=\begin{cases}۲x+۳ & x>۰\\ -x+۴ & x<۱\end{cases}$

ب) $y=\begin{cases}۲x-۱ & x\le ۳\\ x+۲ & x\ge ۳\end{cases}$

ج) $y=\begin{cases}x-۱ & x>۰\\ ۲x+۵ & x\le ۰\end{cases}$

پاسخ تشریحی:

در تمامی موارد ضابطهٔ مربوط به هر بازه، خود نشان دهندهٔ یک تابع است. پس تنها کافی است اشتراک محدوده‌های x را بررسی کنیم:

بررسی (الف): اشتراک محدوده‌های x به‌صورت $۰<x<۱$ است. اگر به عنوان مثال $x=\frac{۱}{۲}$ انتخاب شود به دو جواب متفاوت $y=۴$ و $y=\frac{۷}{۲}$ می‌رسیم، پس رابطهٔ «الف» تابع نیست.

بررسی (ب): اشتراک محدوده‌های x فقط $x=۳$ است. به‌ازای $x=۳$ دو جواب یکسان برای y به‌دست می‌آید ($x=۳\Rightarrow y=۵$)، پس رابطهٔ داده شده تابع است.

بررسی (ج): اشتراک محدوده‌های x، تهی است، پس این رابطه، تابع است.

ماز

۴- مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{۳x+۴}{x-۲}>۴$ را به‌صورت $|x-\alpha|<\beta$ نوشته‌ایم، مقدار $(\beta-۳\alpha)$ چه عددی است؟

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) -۸ ۴) -۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۹۱ و ۹۳ ـ ۱۰۰۴)

برای حل نامعادله داریم:

$$\frac{۳x+۴}{x-۲}-۴>۰\Rightarrow\frac{-x+۱۲}{x-۲}>۰\Rightarrow\frac{x-۱۲}{x-۲}<۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}۲<x<۱۲$$

$$\xrightarrow{\frac{۱۲+۲}{۲}=۷}-۵<x-۷<۵\Rightarrow|x-۷|<۵\Rightarrow\begin{cases}\beta=۵\\ \alpha=۷\end{cases}$$

بنابراین: $\beta-۳\alpha=۵-۲۱=-۱۶$

روش کلی حل نامعادله‌ها

برای حل یک نامعادله، در حالت کلی، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

ابتدا **همهٔ عبارت‌های طرفین** نامعادله را به **یک طرف** آن منتقل می‌کنیم و در طرف دیگر آن عدد **صفر** را قرار می‌دهیم. (معمولاً همشون رو میاریم به سمت چپ!)

سپس عبارت‌ها را به کمک **عملیات جبری** (جمع، تفریق و ...)، **مخرج‌مشترک‌گیری**، **فاکتورگیری**، **اتحاد** و ... تا حد امکان ساده می‌کنیم و به یکی از حالت‌های $f(x)>۰$، $f(x)\ge ۰$، $f(x)<۰$ و یا $f(x)\le ۰$ می‌رسیم. ($f(x)$ می‌تونه یه عبارت درجهٔ اول یا درجهٔ دوم و یا عبارت کسری باشه)

در نهایت، $f(x)$ را **تعیین علامت** کرده و با توجه به **جهت نامساوی**، محدوده جواب را پیدا می‌کنیم.

قِلِقِش رو یاد بگیر!

تعیین علامت عبارت کسری $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ دقیقاً مشابه تعیین علامت $g(x)=P(x)Q(x)$ است تنها با این تفاوت که $f(x)$ در **ریشه‌های مخرج** $Q(x)$ به جای این‌که صفر باشد، **تعریف نشده** است. در نتیجه اگر $Q(x)$ عبارتی بدون ریشه باشد، تعیین علامت دقیقاً یکسان خواهد بود.

ماز

۵- مجموعه جواب نامعادلهٔ $(۳-۲m)x^۲-۳mx-m<۳$ بازهٔ $(-m,n)$ است. با فرض آن‌که m عدد طبیعی باشد، $n-m$ چه عددی است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۹۰ ـ ۱۰۰۴)

برای حل نامعادله داریم: $(۳-۲m)x^۲-۳mx-m-۳<۰$

چون در بازهٔ $(-m,n)$، عبارت **درجه دوم منفی** شده است، پس $۳-۲m>۰$، زیرا در واقع **بین ۲ ریشه، منفی** شده است، پس ضریب $x^۲$ باید **مثبت** باشد:

$$۳-۲m>۰ \Rightarrow m<\frac{۳}{۲}$$

حال چون $m\in\mathbb{N}$ پس $m=۱$. به این ترتیب با قرار دادن مقدار $m=۱$ در نامعادله داریم:

$$x^۲-۳x-۱-۳<۰ \Rightarrow x^۲-۳x-۴<۰ \Rightarrow (x+۱)(x-۴)<۰ \Rightarrow -۱<x<۴ \Rightarrow n=۴$$
$$\Rightarrow n-m=۴-۱=۳$$

تعیین علامت عبارت‌های درجه دوم

$$P(x)=ax^۲+bx+c\ ;\ (a\neq ۰)$$

- حالت‌های ممکن با توجه به $\Delta=b^۲-۴ac$ تعیین می‌شوند:

الف) اگر $\Delta>۰$ باشد، عبارت $P(x)$ دو ریشهٔ α و β دارد، با فرض $\alpha<\beta$ داریم:

x		α		β	
$P(x)=ax^۲+bx+c$	موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

با توجه به علامت a:

$a>۰ \rightarrow$

x		α		β	
$P(x)$	+	۰	−	۰	+

$a<۰ \rightarrow$

x		α		β	
$P(x)$	−	۰	+	۰	−

ب) اگر $\Delta = ۰$ باشد، عبارت در **ریشهٔ مضاعف** ($x = \frac{-b}{۲a}$) برابر **صفر** است و در مقادیر دیگر موافق علامت a :

x	$-\frac{b}{۲a}$	
$P(x)=ax^۲+bx+c$	موافق علامت a	موافق علامت a

$a > ۰ \rightarrow$

x	$-\frac{b}{۲a}$	
P(x)	+	+

$a < ۰ \rightarrow$

x	$-\frac{b}{۲a}$	
P(x)	−	−

ج) اگر $\Delta < ۰$ باشد، عبارت همواره مثبت یا همواره منفی است. (موافق علامت a)

$a > ۰$:

x	
P(x)	+ (موافق علامت a)

$a < ۰$:

x	
P(x)	− (موافق علامت a)

۶- اگر $f = \left\{(x,y) \middle| x,y \in \mathbb{Z}, x = \frac{۱۲}{۵-|y|}\right\}$ حداقل چند عضو از مجموعهٔ f کم کنیم تا f تابع شود؟

۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۴ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ مفهومی ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۹۹ ـ ۱۰۰۵)

چون $x \in \mathbb{Z}$ پس $۵-|y|$ **شمارندهٔ ۱۲** است، در ابتدا داریم:

$$۵-|y| = \pm۱, \pm۲, \pm۳, \pm۴, \pm۶, \pm۱۲$$

در همین ابتدا چون $|y| \geq ۰$ است، $۵-|y| = ۶, ۱۲$ **غیرقابل‌قبول** است. حال $|y|$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} ۵-|y| = ۶ \Rightarrow |y| = -۱ & \times \\ ۵-|y| = ۱۲ \Rightarrow |y| = -۷ & \times \end{cases}$$

$$|y| = ۴, ۶, ۳, ۷, ۲, ۸, ۱, ۹, ۱۱, ۱۷$$

در تمام این حالات برای هر x دو مقدار صحیح برای y به‌دست می‌آید، به عنوان مثال:

$$|y| = ۴ \Rightarrow x = ۱۲ \Rightarrow \begin{matrix}(۱۲,۴) \in f \\ (۱۲,-۴) \in f\end{matrix} \Rightarrow$$

با حذف حداقل یکی از این دو مقدار، یک تابع خواهیم داشت.

برای آنکه با حذف حداقل تعداد زوج‌مرتب به تابع برسیم باید حداقل ۱۰ زوج‌مرتب حذف کنیم.

تشخیص تابع بودن نمایش زوج‌مرتبی

یک نمایش زوج‌مرتبی زمانی نشان‌دهنده یک تابع خواهد بود که هیچ دو زوج‌مرتب متمایزی در آن، **مؤلفهٔ اول برابر** نداشته باشند.

توجه!

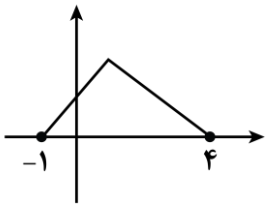
در نمایش زوج‌مرتبی یک تابع، اگر **مؤلفه‌های اول** دو زوج‌مرتب با هم برابر باشند، باید **مؤلفه‌های دوم** آن‌ها نیز با هم **برابر** باشند.

دو نمونهٔ باحال ببین!

$f = \left\{(۰,۲), (\frac{۳}{۵}, ۴), (-۵,۱), (۷,۱)\right\}$ تابع هست

$f = \{(۳,۴), (۵,۰), (۳,۱)\}$ تابع نیست

۷- نمودار تابع f مطابق شکل مقابل است. دامنهٔ تعریف $g(x)=f(1+\sqrt{4-2x})$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۷
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۳۹ و ۴۶ ـ ۱۱۰۲)

با توجه به اینکه $D_f=[-1,4]$ پس دامنهٔ تابع g با دو شرط زیر قابل‌محاسبه است:

$$4-2x\geq 0 \Rightarrow x\leq 2$$

از آن‌جا که عبارت $1+\sqrt{4-2x}$ به عنوان **ورودی** تابع f است باید در **شرط دامنهٔ** آن صدق کند:

$$-1\leq 1+\sqrt{4-2x}\leq 4 \Rightarrow \sqrt{4-2x}\leq 3 \Rightarrow 4-2x\leq 9$$

$$x\geq -\frac{5}{2} \Rightarrow D_g=[-\frac{5}{2},2]$$

اعداد صحیح در دامنهٔ تعریف g عبارت‌اند از $-2,-1,0,1,2$ یعنی شامل ۵ عدد صحیح است.

دامنهٔ تابع

به مجموعه مقادیری که **متغیر** x در تابع $y=f(x)$ **می‌تواند بپذیرد**، دامنهٔ تابع می‌گوییم و معمولاً آن را با نماد D_f نمایش می‌دهیم.

دامنهٔ توابع رادیکالی

برای محاسبهٔ دامنهٔ توابع رادیکالی با فرجهٔ زوج به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt[2n]{g(x)} \Rightarrow D_f=D_g\cap\{x|g(x)\geq 0\}$$

یعنی علاوه بر تعیین دامنهٔ عبارت زیر رادیکال، **زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید همیشه نامنفی باشد.**

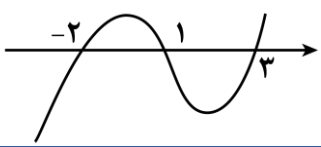
به علاوه به یاد داشته باشید که، حاصل رادیکال با فرجهٔ زوج همیشه عددی نامنفی است. پس در تساوی $\sqrt[2n]{g(x)}=h(x)$ باید $h(x)$ هم نامنفی باشد.

یه نکتهٔ طلایی!

اگر دامنهٔ تعریف تابع $y=f(x)$ به‌صورت $[a,b]$ باشد، دامنهٔ تعریف تابع $y=f(u(x))$ از حل نامعادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$a\leq u(x)\leq b$$

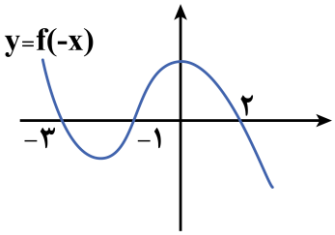
۸- اگر نمودار f مطابق شکل روبه‌رو باشد، دامنهٔ تعریف $y=\sqrt{\frac{x^2+4x+3}{f(-x)}}$ کدام است؟



۱) $(-\infty,-1)-\{-3\}$
۲) $(2,+\infty)$
۳) $(-\infty,2)-\{-1,-3\}$
۴) $(-\infty,-3)\cup(-1,2)$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۴۶ ـ ۱۱۰۲)

باید زیر رادیکال نامنفی باشد، در ابتدا می‌دانیم $f(-x)$ قرینهٔ نمودار f نسبت به محور عرض‌هاست. پس نمودار $y=f(-x)$ مطابق شکل مقابل است:



حال برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع رادیکالی، باید زیر رادیکال **نامنفی** باشد. پس:

$$g(x)=\sqrt{\frac{(x+۱)(x+۳)}{f(-x)}}$$

$$\frac{(x+۱)(x+۳)}{f(-x)}\geq ۰$$

	-۳	-۱	۲	
$(x+۱)(x+۳)$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f(-x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
علامت نهایی	$+$	$+$	$+$	$-$
	ت ن	ت ن	ت ن	

پس:

$$D_g=(-\infty,۲)-\{-۱,-۳\}$$

حل نامعادلهٔ گویا

برای حل نامعادلهٔ گویا کافی است **صورت** و **مخرج** را **تعیین علامت** کنیم و سپس علامت‌های آن‌ها را در جدول تعیین علامت در هم ضرب کنیم و سپس مجموعه جواب مورد نظر را انتخاب کنیم.

ماز

۹- هرگاه دامنهٔ تعریف $f(x)=\sqrt{ax+b}$ بازهٔ $(-\infty,۴]$ باشد، دامنهٔ تعریف تابع $g(x)=\sqrt{-\frac{b}{۲}x+a}$ کدام بازه است؟

۱) $[\frac{۱}{۲},+\infty)$ ۲) $(-\infty,-\frac{۱}{۲}]$ ۳) $[-۲,+\infty)$ ۴) $(-\infty,۲]$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۴۷ ـ ۱۱۰۲)

با توجه به آن‌که دامنهٔ تعریف $y=\sqrt{ax+b}$ بازهٔ $(-\infty,+۴]$ است. تعیین علامت درجه اول $ax+b$ به‌صورت مقابل است:

	۴	
$ax+b$	$+$	$-$

یعنی اولاً $a<۰$ ثانیاً $۴a+b=۰$. پس:

$$\begin{cases}b=-۴a\\a<۰\end{cases}\Rightarrow b>۰$$

به این ترتیب برای تابع g داریم:

$$\begin{cases}b>۰\Rightarrow\frac{-b}{۲}<۰\\-\frac{b}{۲}x+a=۰\end{cases}\Rightarrow x=\frac{۲a}{b}\Rightarrow x=\frac{۲a}{-۴a}=-\frac{۱}{۲},\quad b>۰$$

پس:

	$-\frac{۱}{۲}$	
$-\frac{b}{۲}x+a$	$+$	$-$

یعنی:

$$D_g=(-\infty,-\frac{۱}{۲}]$$

تعیین علامت عبارت‌های درجه اول

$P(x)=ax+b \;;\; (a\neq 0)$

x		$-\frac{b}{a}$	
$ax+b$	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

۱۰- اگر دو تابع $f(x)=\frac{ax+12}{x^2+bx+9}$ و $g(x)=\frac{c}{x+3}$ برابر باشند. مقدار $ac-b$ چه عددی است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۴۱ ـ ۱۱۰۲)

دو تابع f و g برابرند، پس **دامنه‌ها** و **ضابطه‌های برابر** دارند:

$D_g=\mathbb{R}-\{-3\} \Rightarrow$ استا. f تابع در مخرج **مضاعف ریشهٔ** $x=-3$ $\xrightarrow[x=-3]{x^2+bx+9} 9-3b+9=0 \Rightarrow b=6$

پس تابع f به‌صورت زیر است:

$f(x)=\frac{ax+12}{(x+3)^2}=\frac{c}{x+3} \Rightarrow$ است. صورت ریشهٔ $x=-3$

$-3a+12=0 \Rightarrow a=4 \Rightarrow f(x)=\frac{4x+12}{(x+3)^2}=\frac{4(x+3)}{(x+3)^2}$

$f(x)=g(x)=\frac{4}{x+3} \Rightarrow c=4 \Rightarrow \begin{cases} b=6 \\ a=4 \Rightarrow ac-b=10 \\ c=4 \end{cases}$

دو تابع برابر

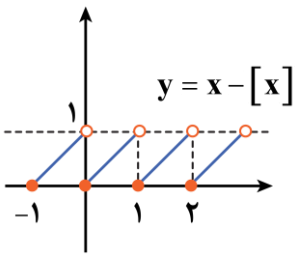
دو تابع f و g با هم **برابرند**، اگر دامنه‌های آن‌ها **برابر** باشند و به‌ازای هر x از دامنه $f(x)=g(x)$ باشد، به عبارت دیگر **ضابطه‌ها** هم **برابر** باشند.

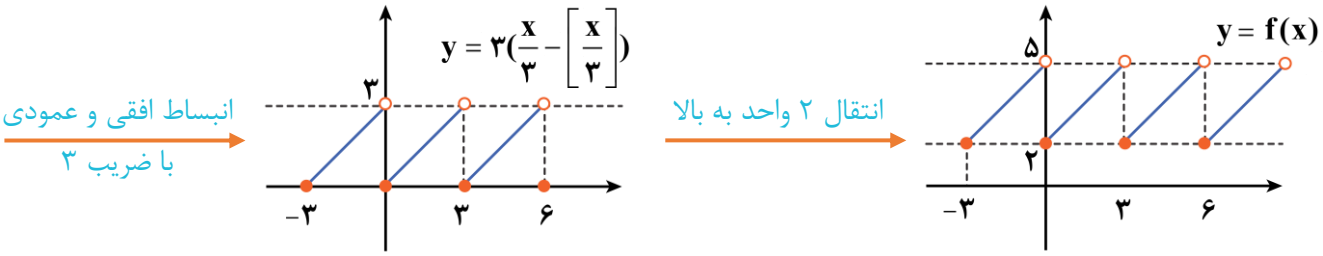
۱۱- نمودار تابع $f(x)=3(\frac{x}{3}-[\frac{x}{3}])+2$ کدام خط افقی را قطع می‌کند؟ ([ ] نماد جزءصحیح است.)

۱) $y=5$ ۲) $y=6$ ۳) $y=3/5$ ۴) $y=1/5$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۴۹ و حسابان ۲ صفحهٔ ۶ و ۹ ـ ۱۱۰۲ و ۱۲۰۱)

نمودار تابع f را از روی نمودار $y=x-[x]$ رسم می‌کنیم. می‌دانیم:

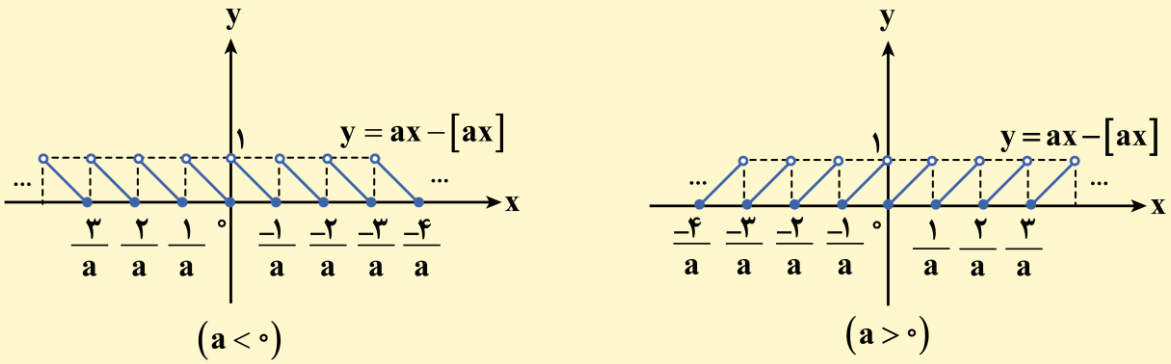




چون $R_f=[۲,۵)$ پس خطوط افقی $y=k$ که $۲\le k<۵$ نمودار f را قطع می‌کنند. با توجه به گزینه‌ها تنها $y=۳/۵$ را قطع می‌کند.

چمن در باد!

یکی از توابع معروف براکتی، تابع $y=ax-[ax]\ ;\ (a\neq ۰)$ معروف به تابع چمن در باد است، که نمودار آن به‌صورت زیر رسم می‌شود:



تبدیل نمودار توابع

فرض کنید نمودار تابع $y=f(x)$ را داشته باشیم:

تبدیل نمودارها

- $f(x+a)$ ← نمودار $f(x)$ را روی محور xها به اندازهٔ $|a|$ واحد **جلو** یا **عقب** می‌بریم.
  - $a>۰$ ← سمت چپ
  - $a<۰$ ← سمت راست
- $f(kx)$ ← طول نقاط نمودار $f(x)$ را بر k **تقسیم** می‌کنیم.
  - $k>۱$ ← نمودار روی محور xها فشرده می‌شود.
  - $۰<k<۱$ ← نمودار روی محور xها کشیده می‌شود.
  - $k<۰$ ← نمودار علاوه بر دو حالت فوق نسبت به محور yها قرینه هم می‌شود.
- $f(x)+b$ ← نمودار $f(x)$ را روی محور yها به اندازهٔ $|b|$ واحد **بالا** یا **پایین** می‌بریم.
  - $b>۰$ ← به‌بالا
  - $b<۰$ ← به‌پایین
- $kf(x)$ ← عرض نقاط نمودار $f(x)$ را در k **ضرب** می‌کنیم.
  - $k>۱$ ← نمودار روی محور yها کشیده می‌شود.
  - $۰<k<۱$ ← نمودار روی محور yها فشرده می‌شود.
  - $k<۰$ ← نمودار علاوه بر دو حالت فوق نسبت به محور xها قرینه هم می‌شود.
- $f(ax+b)$ ← نمودار $f(x)$ را روی محور xها به اندازهٔ $|b|$ واحد جلو یا عقب برده (بسته به علامت b) و سپس طول نقاط را بر a تقسیم می‌کنیم.

۱۲- اگر $f(x)=\begin{cases} x+f(x-1) & x\geq 4 \\ x-f(x+1) & x<4 \end{cases}$ مقدار $f(6)+f(4)$ چه عددی است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۴۰ ـ ۱۱۰۲)

برای یافتن مقدار خواسته‌شده ابتدا به کمک ضابطهٔ بالایی $f(6)$ را می‌یابیم:

$$f(6)=6+f(5)\overset{\text{ضابطهٔ بالایی}}{=\!=}6+5+f(4)=11+f(4)$$
$$\overset{\text{ضابطهٔ بالایی}}{=\!=}11+4+f(3)=15+f(3)$$
$$\overset{\text{ضابطهٔ پایینی}}{=\!=}15+3-f(4)=18-f(4)$$

پس: $f(6)+f(4)=18$

قِلِقِش رو یاد بگیر!

برای محاسبهٔ مقدار تابع چندضابطه‌ای f در $x=a$ باید ببینیم a در کدام دامنه صدق می‌کند، سپس با جای‌گذاری $x=a$ در ضابطهٔ مربوط به آن دامنه، مقدار تابع را در $x=a$ می‌یابیم.

۱۳- تابع $f(x)=x^2-2x-1$ را a واحد به بالا و $2a$ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم. شکل به‌دست آمده از مبدأ مختصات عبور خواهد کرد، مقدار مثبت a چه عددی است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

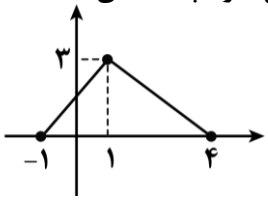
پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۳ ـ ۱۲۰۱)

اگر نمودار f را a واحد به سمت بالا و $2a$ واحد به سمت چپ انتقال دهیم به تابع $y=a+f(x+2a)$ می‌رسیم و البته قرار است تابع جدید از **مبدأ** عبور کند، یعنی:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow 0=a+f(2a) \Rightarrow f(2a)=-a$$

$$\Rightarrow 4a^2-4a-1=-a \Rightarrow 4a^2-3a-1=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-\frac{1}{4} \end{cases} \xrightarrow{a>0} a=1$$

۱۴- اگر نمودار $y=3f(2x)$ مطابق شکل مقابل باشد، مساحتی که نمودار تابع $y=\frac{1}{3}f(\frac{x}{2})$ با محور xها می‌سازد چه عددی است؟



۱) $\frac{15}{24}$ ۲) $\frac{30}{18}$ ۳) $\frac{10}{3}$ ۴) $\frac{15}{4}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۰ ـ ۱۲۰۱)

می‌دانیم $f(ax)$ انبساط یا انقباض‌یافتهٔ تابع $y=f(x)$ در راستای محور xها و تابع $af(x)$ انبساط یا انقباض‌یافتهٔ تابع $y=f(x)$ در راستای محور عرض‌هاست. پس:

$$y=3f(2x) \Rightarrow S=\frac{1}{2}\times 3\times 5=\frac{15}{2}$$

یعنی مساحت به‌دست‌آمده بین نمودار و محور طول‌ها برابر $\frac{۱۵}{۲}$ است. حال ببینیم چه اتفاقی بر سر تابع آمده و آن اتفاق روی مساحت چه اثری می‌گذارد. در ابتدا داریم:

$$y=۳\times f(۲x) \xrightarrow[\text{با ضریب } \frac{۱}{۹}]{\text{انقباض عمودی}} y=\frac{۱}{۹}\times ۳f(۲x)=\frac{۱}{۳}f(۲x)$$

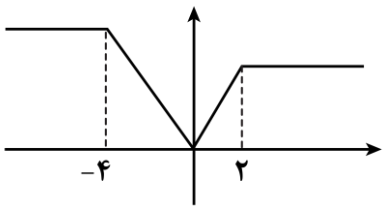
پس **ارتفاع** مثلث $\frac{۱}{۹}$ **برابر** می‌شود، پس مساحت ضریب $\frac{۱}{۹}$ خواهد داشت. از طرفی:

$$y=\frac{۱}{۳}f(۲x) \xrightarrow[\text{با ضریب } ۴]{\text{انبساط افقی}} y=\frac{۱}{۳}f(\frac{۱}{۴}\times ۲x)=\frac{۱}{۳}f(\frac{x}{۲})$$

یعنی طول یا **قاعدهٔ** مثلث **۴ برابر** می‌شود پس مساحت مثلث در عدد ۴ نیز ضرب می‌شود. پس در کل داریم:

$$S_{\text{جدید}}=\frac{۱۵}{۲}\times\frac{۱}{۹}\times ۴=\frac{۶۰}{۱۸}=\frac{۱۰}{۳}$$

۱۵- اگر نمودار f مطابق شکل روبه‌رو باشد، کدام تابع با دامنهٔ $\mathbb{R}$ تابعی ثابت است؟



۱) $y=f(|x+۲|)$

۲) $y=f(|x|+۴)$

۳) $y=f(|x|-۲)$

۴) $y=f(۴-|x|)$

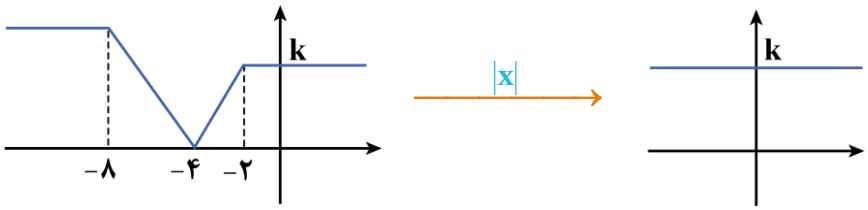
پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی/ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۲۰۱)

روش اول

در گزینهٔ ۲ دقت کنید $(|x|+۴)$ همواره از ۲ بیشتر است. یعنی ورودی f همیشه از ۲ بیشتر است چون تابع f برای $x>۲$ ثابت است پس $y=f(|x|+۴)$ تابعی ثابت است.

روش دوم

ابتدا $f(x+۴)$ را با **انتقال** ۴ واحدی تابع f به سمت **چپ** رسم می‌کنیم. سپس نمودار تابع به‌دست‌آمده را برای $x<۰$ **حذف** کرده و نمودار مانده را نسبت به محور **عرض‌ها قرینه** می‌کنیم. تابع حاصل $y=f(|x|+۴)$ است و ضابطهٔ آن $g(x)=k$ یعنی تابع **ثابت** خواهد بود.



بررسی سایر گزینه‌ها:

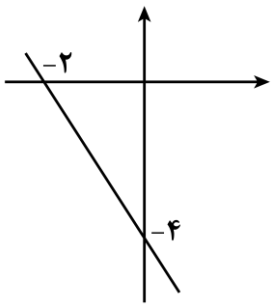
۱) در طول‌های بزرگ‌تر یا مساوی صفر، تابع f ثابت نیست. $|x|\geq ۰ \Rightarrow |x+۲|\geq ۰$

۳) در طول‌های بزرگ‌تر یا مساوی -۲ تابع f ثابت نیست. $|x|\geq ۰ \xrightarrow{-۲} |x|-۲\geq -۲ \Rightarrow$

۴) در طول‌های کوچک‌تر یا مساوی ۴ تابع f ثابت نیست. $|x|\geq ۰ \xrightarrow{\times(-۱)} -|x|\leq ۰ \xrightarrow{+۴} ۴-|x|\leq ۴ \Rightarrow$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۶- نمودار تابع خطی f مطابق شکل مقابل است، کدام تابع همانی است؟



۱) $y=۲f(۴-\frac{x}{۲})$

۲) $y=f(\frac{x}{۲})+۴$

۳) $y=\frac{۱}{۲}f(۴x-۲)$

۴) $y=-۴-f(\frac{x}{۲})$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۲۰۱)

روش اول

اولاً $f(x)=-۲x-۴$ است. ثانیاً باید با تبدیلاتی این تابع را به تابع $y=x$ یا تابع **همانی** تبدیل کنیم.

$$f(x)=-۲x-۴ \xrightarrow{\text{تبدیل } x \text{ به } \frac{x}{۲}} y=-۲(\frac{x}{۲})-۴=-x-۴$$

سپس نسبت به **محور طول‌ها قرینه** می‌کنیم:

$$y=-(-x-۴)=x+۴ \xrightarrow{\text{انتقال ۴ واحد به پایین}} y=x$$

یعنی تابع به‌دست‌آمده $y=-f(\frac{x}{۲})-۴$ خواهد بود.

روش دوم

بررسی سایر گزینه‌ها:

تذکر!
تابع به‌دست‌آمده باید از نقاط به شکل $(n\ ,\ n)$ بگذرد. پس با این شرط می‌توانیم سایر گزینه‌ها را چک کنیم.

۱) $x=۰ \Rightarrow y=۲f(۴)\neq ۰$

۲) $x=-۴ \Rightarrow y=f(-۲)+۴=۴ \Rightarrow y\neq -۴$

۳) $x=۱ \Rightarrow y=\frac{۱}{۲}f(۲)<۰ \Rightarrow y\neq ۱$

۱۷- تابع $f(x)=۴x-x^۲$ را ۲a واحد در راستای افقی انتقال می‌دهیم. آن را تابع g می‌نامیم و مجدد f را a واحد در راستای افقی در جهت خلاف حالت قبل انتقال می‌دهیم. اگر نقطهٔ تلاقی تابع جدید با تابع g، نقطه‌ای با طول یک باشد، مقدار غیرصفر a کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۴ ۳) -۶ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۳ ـ ۱۲۰۱)

ترجمهٔ صورت سؤال

«نقطهٔ تلاقی تابع جدید (مثلاً h) با تابع g، نقطه‌ای با طول یک باشد.» یعنی: $g(۱)=h(۱)$

اگر تابع $y=f(x)$ را ۲a واحد به راست انتقال دهیم به ضابطهٔ $g(x)=f(x-۲a)$ می‌رسیم و اگر f را a واحد به چپ انتقال دهیم به تابع $h(x)=f(x+a)$ می‌رسیم. پس داریم:

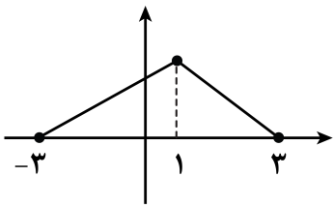
$$g(۱)=h(۱) \Rightarrow f(۱-۲a)=f(۱+a)$$
$$۴(۱-۲a)-(۱-۲a)^۲=۴(۱+a)-(۱+a)^۲$$

$$۴-۸a-۱+۴a-۴a^۲=۴+۴a-۱-۲a-a^۲$$

$$۳a^۲+۶a=۰\Rightarrow ۳a(a+۲)=۰\Rightarrow \begin{cases} a=۰ \\ a=-۲ \end{cases} \xrightarrow{a\neq ۰} a=-۲$$

ماز

۱۸- نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت شکل مقابل است. اگر تابع $y=f(۲a-x)$ از ناحیهٔ دوم عبور نکند، حداقل مقدار a کدام است؟



۱) ۳
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۶
۴) $\frac{۷}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ مفهومی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۹ ـ ۱۲۰۱)

اگر ابتدا نمودار f را **حداقل ۳ واحد به چپ** انتقال دهیم نمودار تابع $y=f(x+۳)$ **کاملاً** در **ناحیهٔ دوم** قرار می‌گیرد و وقتی آن را نسبت به **محور عرض‌ها بازتاب** دهیم، آنگاه تمام نمودار $y=f(-x+۳)$ در **ناحیهٔ اول** قرار می‌گیرد و در نهایت از ناحیهٔ دوم عبور نخواهد کرد.

یعنی $۲a\geq ۳$ پس $a\geq \frac{۳}{۲}$ و حداقل مقدار a برابر $\frac{۳}{۲}$ خواهد بود.

ماز

۱۹- اگر تابع $y=۲-f(x+۳)$ را ۳ واحد به چپ انتقال دهیم و سپس نسبت به مبدأ مختصات قرینه کنیم به تابع $y=x^۳$ خواهیم رسید. تابع $y=f(x)$ با کدام ضابطه است؟

۱) $f(x)=۲-x^۳$
۲) $f(x)=x^۳-۲$
۳) $f(x)=۲-(x-۶)^۳$
۴) $f(x)=۲+(x-۶)^۳$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۲۰۱)

کافی است تبدیلات بیان‌شده را بر روی تابع اعمال کنیم و نهایتاً به تابع $y=x^۳$ برسیم.

$$y=۲-f(x+۳)\xrightarrow[x\to x+۳]{\text{۳ واحد به چپ}} y=۲-f(x+۶)\xrightarrow[\times(-۱)]{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} y=-(۲-f(۶-x))=f(۶-x)-۲$$

قرار است این تابع $y=x^۳$ باشد، یعنی:

$$f(۶-x)-۲=x^۳\Rightarrow f(۶-x)=x^۳+۲$$

حال برای این‌که $۶-x$ را در ورودی تابع f به x تبدیل کنیم، از یک تغییر متغیر استفاده می‌کنیم:

$$۶-x=t\Rightarrow x=۶-t\Rightarrow f(t)=(۶-t)^۳+۲=۲-(t-۶)^۳$$

حال مجددا به جای t از همان متغیر با نام x استفاده می‌کنیم. پس:

$$f(x)=۲-(x-۶)^۳$$

قِلِقِش رو یاد بگیر!

اگر ضابطهٔ $y=f(u(x))$ داده‌شده باشد و ضابطهٔ $f(x)$ را بخواهیم، کافی است با **تغییر متغیر** $u(x)=t$، x را برحسب t بنویسیم و ضابطهٔ f را بیابیم.

ماز

۲۰- اگر دامنهٔ تعریف $y=f(x)$ بازهٔ $[-۲,۳]$ باشد، به‌طوری که دامنهٔ تعریف $y=f(a-\frac{x}{۲})$ بازهٔ $[b,۱۰]$ باشد، مقدار $b-a$ چه عددی است؟

۱) -۳ ۲) -۱۰ ۳) -۵ ۴) -۷

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۰ ـ ۱۲۰۱)

وقتی $D_f=[-۲,۳]$ برای یافتن دامنهٔ تعریف $y=f(a-\frac{x}{۲})$ به شکل زیر عمل می‌کنیم.

$$-۲\le a-\frac{x}{۲}\le ۳ \xrightarrow{\times(-۱)} -۳\le \frac{x}{۲}-a\le ۲ \xrightarrow{+a} a-۳\le \frac{x}{۲}\le a+۲ \xrightarrow{\times ۲} ۲a-۶\le x\le ۲a+۴$$

پس:

$$\begin{cases} ۲a+۴=۱۰ \Rightarrow a=۳ \\ b=۲a-۶ \xrightarrow{a=۳} b=۰ \end{cases}$$

درنتیجه: $b-a=۰-۳=-۳$

دامنه و برد تابع $y=kf(ax+b)+h$

اگر **دامنهٔ** تابع $y=f(x)$ بازهٔ $[m,n]$ باشد برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $y=kf(ax+b)+h$ باید **مجموعه جواب نامعادلهٔ** زیر را به‌دست آوریم:

$m\le ax+b\le n \Rightarrow$ حل نامعادله، دامنهٔ تابع را می‌دهد.

و اگر **برد** تابع $y=f(x)$ بازهٔ $[m,n]$ باشد برای محاسبهٔ برد تابع $y=kf(ax+b)+h$ داریم:

طرفین نامعادله را در k ضرب کرده و سپس با h جمع می‌کنیم. $\Rightarrow m\le f(ax+b)\le n$

یه نمونهٔ باحال ببین!

اگر دامنهٔ تابع $y=f(x)$ بازهٔ $(-۱,۵]$ باشد، دامنهٔ تابع $y=-۲+۳f(۲x+۱)$ را به‌دست آورید.

کافی است در تابع جدید، عبارت مقابل f یعنی $۲x+۱$ را در فاصلهٔ $(-۱,۵]$ قرار دهیم:

$$-۱\le ۲x+۱<۵ \Rightarrow -۲\le ۲x<۴ \Rightarrow -۱\le x<۲ \Rightarrow D_{-۲+۳f(۲x+۱)}=[-۱,۲)$$

۲۱- ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۳a-۲b & ۲a-۶ \\ b+۲ & a+۳b \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری است. کدام گزینه نادرست است؟

۱) ماتریس $[a]$ ماتریس اسکالر است.

۲) ماتریس $\begin{bmatrix} a^۲+۴b & ۲a+۳b \\ a+\frac{۳}{۲}b & \frac{a}{۳} \end{bmatrix}$ ماتریس اسکالر است.

۳) ماتریس $[\frac{b}{۲}]$ ماتریس صفر است.

۴) ماتریس $\begin{bmatrix} a+b & a-۳ \\ ۲a+۳b & b+۲ \end{bmatrix}$ ماتریس قطری است.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۲۰۱)

در ماتریس قطری درایه‌های **بالا و پایین قطر اصلی** صفر هستند، پس:

$$A=\begin{bmatrix} ۳a-۲b & ۲a-۶ \\ b+۲ & a+۳b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۲a-۶=۰ \Rightarrow a=۳ \\ b+۲=۰ \Rightarrow b=-۲ \end{cases}$$

بررسی گزینه‌ها:

۱) به‌ازای $a=۳$، به ماتریس مربعی $[۳]$ می‌رسیم که یک ماتریس **اسکالر** است.

۲) به‌ازای $a=۳$ و $b=-۲$ به ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ که ماتریسی **اسکالر** است می‌رسیم.

۳) به‌ازای $b=-۲$ به ماتریس $[-۱]$ می‌رسیم که ماتریس صفر **نیست**.

۴) به‌ازای $a=۳$ و $b=-۲$ به ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ می‌رسیم که ماتریس **قطری** است.

بنابراین گزینهٔ «۳» نادرست است.

ماتریس

اعداد حقیقی چیده‌شده در یک **آرایش مستطیلی** شامل m سطر و n ستون، را یک ماتریس می‌گوییم.

ماتریس مربعی

اگر در ماتریس A، **تعداد سطرها** با **تعداد ستون‌ها برابر** و مساوی n باشد، A را یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n $(n\times n)$ می‌نامیم.

دو نمونهٔ باحال ببین!

ماتریس‌های زیر ماتریس‌هایی مربعی هستند:

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}_{۲\times ۲} \qquad B=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ & ۶ \\ ۵ & ۰ & ۱ \\ ۴ & -۲ & ۳ \end{bmatrix}_{۳\times ۳}$$

ماتریس صفر

ماتریسی است که **همهٔ درایه‌های آن صفر** باشند و آن را با نماد $\bar{O}$ نشان می‌دهیم.

دو نمونهٔ باحال ببین!

$$\bar{O}_{۲\times ۳}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \qquad \bar{O}_{۲\times ۲}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

تذکر!

یک ماتریس صفر لزوماً ماتریسی مربعی نیست و می‌تواند تعداد سطرها و ستون‌هایش متفاوت باشد.

ماتریس قطری

ماتریس قطری، ماتریسی مربعی است که تمام **درایه‌های غیرواقع** بر **قطر اصلی** آن **صفر** باشند. (درایه‌های واقع بر قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند.)

دو نمونهٔ باحال ببین!

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$



ماتریس اسکالر

ماتریس اسکالر، ماتریسی قطری است که **درایه‌های** واقع بر **قطر اصلی** آن، همگی با هم **برابرند**.

دو نمونهٔ باحال ببین!

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}۳ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۳\end{bmatrix}$$

ماز

۲۲- حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A=\left[i^{۲}-۴j\right]_{۱۳\times ۱۳}$ برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱۳ ۳) ۱۶۹ ۴) ۲۶

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۱۱ و ۱۲ ـ ۱۴۰۱)

دقت کنید با توجه به تعریف درایه‌های ماتریس A دیده می‌شود که درایهٔ $a_{۴۴}$ برابر $۴^{۲}-۴(۴)=۰$ است، پس **یکی** از درایه‌های **قطر اصلی** این ماتریس **صفر** است، بنابراین حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی آن صفر است:

$$a_{۱۱}\,a_{۲۲}\,a_{۳۳}\,\underbrace{a_{۴۴}}_{۰}\,\dots\,a_{۱۳۱۳}=۰$$

تعریف قطر اصلی و فرعی در ماتریس مربعی

در ماتریس مربعی $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ به درایه‌هایی با شرط $i=j$ **قطر اصلی** و به درایه‌هایی با شرط $i+j=n+۱$ **قطر فرعی** می‌گویند.

یه نمونهٔ باحال ببین!

در یک ماتریس ۳×۳ می‌توان قطرهای اصلی و فرعی را به‌صورت زیر نشان داد:

قطر اصلی قطر فرعی

$$A=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳}\\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{bmatrix}_{۳\times ۳}$$

ماز

۲۳- دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲n & ۳ & -۱\\ ۵ & -۲ & m\end{bmatrix}$ و $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ مساوی‌اند. مجموع درایه‌های ماتریس B برابر کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۲ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۱۳ ـ ۱۴۰۱)

دو ماتریس مساوی **هم‌مرتبه** هستند. چون مرتبهٔ ماتریس A برابر ۲×۳ است داریم:

$$m\times n=۲\times ۳\Rightarrow m=۲\ ,\ n=۳$$

در نتیجه درایه‌های ماتریس A به صورت زیر هستند.

$$A=\begin{bmatrix}۶ & ۳ & -۱\\ ۵ & -۲ & ۲\end{bmatrix}\xrightarrow{A=B}B=\begin{bmatrix}۶ & ۳ & -۱\\ ۵ & -۲ & ۲\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\text{مجموع درایه‌های } B=۶+۳-۱+۵-۲+۲=۱۳$$

دو ماتریس برابر

گوییم دو ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ و $B=\left[b_{ij}\right]_{r\times s}$ برابر هستند، اگر **هم‌مرتبه** باشند (یعنی $m=r$ و $n=s$) و **درایه‌های** آن‌ها **نظیربه‌نظیر برابر** باشند (یعنی $\begin{cases}۱\le i\le m\\ ۱\le j\le n\end{cases}$; $a_{ij}=b_{ij}$).

ماز

۲۴- ماتریس $A=\left[m^{۲}-۲ij\right]_{(۵-m)\times(m-۱)}$ یک ماتریس مربعی است. مجموع درایه‌های قطر فرعی A برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) ۵ ۳) ۲۵ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۲۰۱)

یک ماتریس **مربعی** است هرگاه **تعداد سطرها** و **ستون‌های** آن **برابر** باشند.

ماتریس A از مرتبهٔ $(m-۱)\times(۵-m)$ است در نتیجه $m-۱=۵-m$، پس $m=۳$.

بنابراین:

$$A=\left[m^{۲}-۲ij\right]_{(۵-m)\times(m-۱)} \xrightarrow{m=۳} A=\left[۹-۲ij\right]_{۲\times۲}$$

اکنون درایه‌های **قطر فرعی** A را پیدا می‌کنیم.

قطرفرعی

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{۱۲}=۹-۲(۱)(۲)=۵ \\ a_{۲۱}=۹-۲(۲)(۱)=۵ \end{cases} \Rightarrow a_{۱۲}+a_{۲۱}=۱۰$$

۲۵- اگر $A_{۳m\times n}$ ماتریس سطری و $B_{۵\times۲p}$ ماتریس ستونی باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس $C=\begin{bmatrix} ۲p+۱ & m & ۱-۳m \\ ۶pm & n(۲p-۱) & \frac{m+۱}{p} \end{bmatrix}$ برابر کدام است؟

۱) ۶ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) ۸ ۴) $\frac{۱۳}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۱۶ ـ ۱۲۰۱)

ماتریس $A_{۳m\times n}$ **سطری** است پس این ماتریس **فقط یک سطر** دارد، در نتیجه $۳m=۱$ یعنی $m=\frac{۱}{۳}$.

از طرف دیگر ماتریس $B_{۵\times۲p}$ ماتریس **ستونی** است پس این ماتریس **فقط یک ستون** دارد، در نتیجه $۲p=۱$ یعنی $p=\frac{۱}{۲}$.

بنابراین درایه‌های ماتریس C عبارت‌اند از:

$$C=\begin{bmatrix} ۲p+۱ & m & ۱-۳m \\ ۶pm & n(۲p-۱) & \frac{m+۱}{p} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & \frac{۱}{۳} & ۰ \\ ۱ & ۰ & \frac{۸}{۳} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=۶$$

ماتریس سطری

ماتریسی که **فقط یک سطر** داشته باشد را ماتریس سطری گوییم.

یه نمونهٔ باحال ببین!

$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix} ۲ \end{bmatrix}$

ماتریس ستونی

ماتریسی که **فقط یک ستون** داشته باشد را ماتریس ستونی گوییم.

یه نمونهٔ باحال ببین!

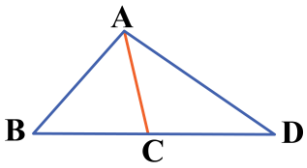
$$A=\begin{bmatrix}۱\\۱\\۱\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix} \qquad C=[۸]$$

۲۶- نقاط متمایز A، B، C و D در یک صفحه قرار دارند. اگر نقاط B، C و D روی یک خط باشند و نقطهٔ A بر این خط واقع نباشد، آنگاه چند نقطه در این صفحه وجود دارد که از حداقل سه تا از این نقاط به یک فاصله باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۱۹ ـ ۱۰۰۱)

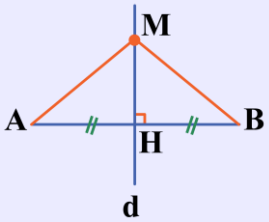
این نقاط با هم شکل زیر را می‌سازند.



در واقع با هم سه مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، $\overset{\triangle}{ADC}$ و $\overset{\triangle}{ABD}$ را ایجاد می‌کنند و در هر مثلث فقط یک نقطه وجود دارد که **از هر سه رأس** آن به یک فاصله است آن هم نقطهٔ همرسی **عمودمنصف‌ها** است، بنابراین محل برخورد عمودمنصف اضلاع مثلث‌های $\overset{\triangle}{ABC}$، $\overset{\triangle}{ADC}$ و $\overset{\triangle}{ABD}$ نقاط موردنظر این سوال می‌باشد که ۳ تا است.

عمودمنصف یک پاره‌خط

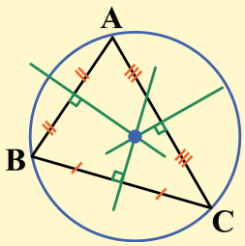
هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و برعکس. ببینید:



M روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد. $\Leftrightarrow MA=MB$

نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها در مثلث

محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع مثلث، از هر ۳ **رأس** مثلث به یک فاصله بوده و **مرکز دایرهٔ محیطی** مثلث است.

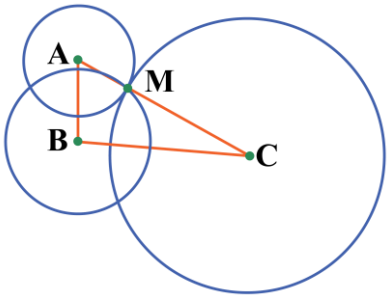


۲۷- نقاط A، B و C سه رأس مثلث ABC در یک صفحه هستند. در این صفحه به تعداد m نقطه وجود دارد که فاصله‌اش از این سه رأس به ترتیب ۳، ۴ و ۸ باشد، m چه تعداد از عبارات ۰، ۱، ۳ یا بی‌شمار می‌تواند باشد؟

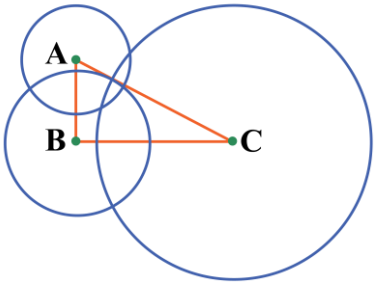
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۱۶ ـ ۱۰۰۱)

به مراکز A، B و C و به ترتیب دوایری به شعاع‌های ۳، ۴ و ۸ رسم می‌کنیم. اگر این سه دایره **از یک نقطه بگذرند** (که ممکن است)، **یک** جواب و اگر همگی **از یک نقطه نگذرند** (که باز هم ممکن است)، **صفر** جواب خواهیم داشت. بنابراین m می‌تواند یکی از دو عبارت ۰ یا ۱ باشد.



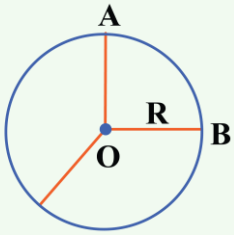
۱ جواب (نقطهٔ M)



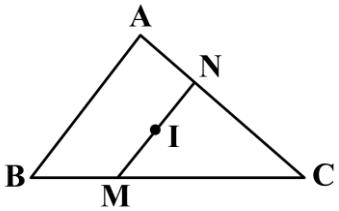
صفر جواب

نقاط به فاصلهٔ ثابت از نقطهٔ ثابت

نقاطی از صفحه که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ ثابت R باشند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع R است.



۲۸- در مثلث $\hat{ABC}$ از نقطهٔ I محل همرسی نیمسازهای زوایای داخلی آن خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا دو ضلع دیگر را در نقاط M و N قطع کند، حاصل BM + AN برابر کدام است؟



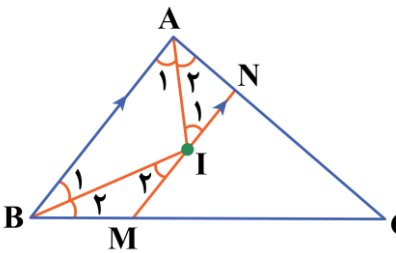
۱) $\frac{AB+AC}{2}$ ۲) AB

۳) MN ۴) $\frac{AB+AC+BC}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۱۹ ـ ۱۰۰۱)

نقطهٔ I محل همرسی نیمسازهای زوایای داخلی مثلث $\hat{ABC}$ است، پس IA **نیمساز** $\hat{A}$ و IB **نیمساز** $\hat{B}$ است. در نتیجه:

$$\hat{B}_1 = \hat{B}_2 \quad و \quad \hat{A}_1 = \hat{A}_2$$



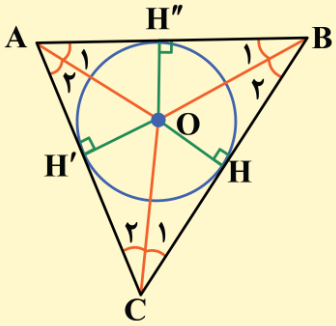
$$\left.\begin{matrix} MN \parallel AB \\ AI \text{ مورب} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{I}_1 \xrightarrow{\hat{A}_1=\hat{A}_2} \hat{I}_1 = \hat{A}_2 \xrightarrow{\hat{ANI} \text{ متساوی‌الساقین}} AN = NI \quad (1)$$

$$\left.\begin{matrix} MN \parallel AB \\ BI \text{ مورب} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{I}_2 \xrightarrow{\hat{B}_1=\hat{B}_2} \hat{I}_2 = \hat{B}_2 \xrightarrow{\hat{BMI} \text{ متساوی‌الساقین}} BM = MI \quad (2)$$

$$\text{جمع (۱) و (۲)} \Rightarrow AN + BM = NI + MI = MN$$

نقطهٔ همرسی نیمسازها در مثلث

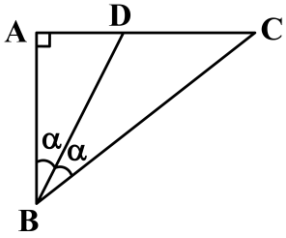
محل برخورد نیمسازهای زوایای درونی مثلث، از هر ۳ **ضلع** مثلث به یک فاصله بوده و **مرکز دایرهٔ محاطی** مثلث است.



یادآوری خطوط موازی و مورب!

اگر دو خط موازی را خطی مورب قطع کند همهٔ زاویه‌های حادهٔ ایجاد شده با هم برابرند و همهٔ زاویه‌های باز ایجاد شده نیز با هم برابرند.

۲۹- در شکل مقابل، $AD=۶$ و $BC-AB=۸$، اندازهٔ ضلع AC برابر کدام است؟

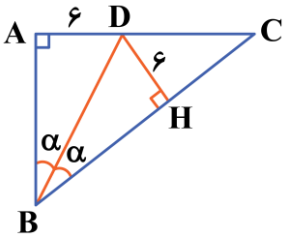


۱) ۱۰
۲) ۱۲
۳) ۱۴
۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۰۰۱)

در شکل BD **نیمساز** زاویهٔ $\hat{B}$ است، پس نقطهٔ D از دو ضلع زاویهٔ $\hat{B}$ **به یک فاصله** است. یعنی اگر از D عمود DH را بر BC وارد کنیم، آنگاه $DH=DA=۶$ است.

از طرف دیگر:



$$\left.\begin{matrix} DA=DH \\ BD=BD \\ \hat{A}=\hat{H}=۹۰^\circ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائمه}} \overset{\triangle}{ABD}\cong\overset{\triangle}{BDH}\Rightarrow BH=AB \quad (۱)$$

$$\Rightarrow BC-AB=۸ \xrightarrow{(۱)} BC-BH=۸\Rightarrow CH=۸$$

بنابراین:

$$\overset{\triangle}{DCH}: DC^۲=DH^۲+CH^۲=۶^۲+۸^۲=۱۰۰\Rightarrow DC=۱۰$$

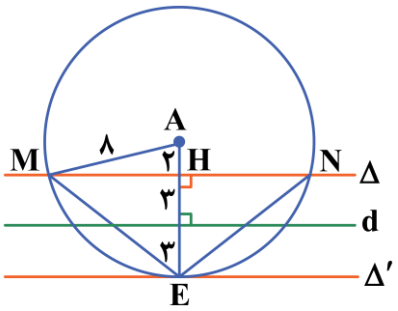
$$AC=AD+DC\Rightarrow AC=۶+۱۰=۱۶$$

۳۰- نقطهٔ A از خط d به فاصلهٔ ۵ قرار دارد. مجموعه نقاطی که از A به فاصلهٔ ۸ و از خط d به فاصلهٔ ۳ قرار دارند، رئوس یک چندضلعی هستند. مساحت این چندضلعی کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۱۵}$ ۲) $۱۲\sqrt{۱۵}$ ۳) $۴\sqrt{۶}$ ۴) $۸\sqrt{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ مفهومی ـ زمان‌بَر ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۱۵ ـ ۱۰۰۱)

مجموعه نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۳ قرار دارند دو خط Δ و Δ' **موازی** با d در **طرفین** آن هستند و مجموعه نقاطی که از A به فاصلهٔ ۸ هستند **دایره** به **مرکز** A و **شعاع** ۸ می‌باشند. با توجه به شکل خط Δ این دایره را در نقاط M و N قطع می‌کند و خط Δ' در نقطهٔ E بر دایره مماس است. پس نقاط M، N و E دارای شرایط این سؤال هستند و با این نقاط مثلث $\overset{\triangle}{MNE}$ ایجاد می‌شود.



مسلماً ارتفاع مثلث **متساوی‌الساقین** $\overset{\triangle}{MNE}$ پاره‌خط $EH=۶$ است و قاعدهٔ آن MN است.

اکنون از A به M وصل کرده و می‌نویسیم:

$$\overset{\triangle}{AMH}: MH^۲ = AM^۲ - AH^۲ \xrightarrow{AM=۸} MH^۲ = ۶۴ - ۴ = ۶۰ \Rightarrow MH = \sqrt{۶۰} = ۲\sqrt{۱۵}$$

$$\Rightarrow MN = ۲MH = ۴\sqrt{۱۵}$$

بنابراین:

$$S_{\overset{\triangle}{MNE}} = \frac{۱}{۲} EH \times MN = \frac{۱}{۲}(۶)(۴\sqrt{۱۵}) = ۱۲\sqrt{۱۵}$$

رفع ابهام!

چرا مثلث $\overset{\triangle}{MNE}$ متساوی‌الساقین است؟

زیرا دو مثلث MHE و NHE به حالت دو ضلع و زاویهٔ بین با هم همنهشت‌اند.

$$\left.\begin{array}{l} EH = EH \\ \hat{H} = ۹۰ \\ MH = NH \end{array}\right\} \xrightarrow{(ض‌زض)} \overset{\triangle}{MHE} = \overset{\triangle}{NHE} \Rightarrow ME = NE$$

برابری MH و NH از رابطهٔ فیثاغورس و برابری وتر دو مثلث که شعاع دایره هستند به‌دست می‌آید.

ماز

۳۱- برای کدام حکم زیر در دنیای مجموعه‌ها، نمی‌توان مثال نقضی پیدا کرد؟

۱) $A - B = A - C \Rightarrow B = C$ ۲) $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$

۳) $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$ ۴) $B \cap C = B \cup C \Rightarrow B = C$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۳ ـ ۱۲۰۱)

۱

مثال نقض: $A = \{۱\}, B = \{۲\}, C = \{۳\}$

۲

مثال نقض: $A = \{۱\}, B = \{۱,۲\}, C = \{۱,۳\}$

۳

مثال نقض: $A=\{۱,۲\}\ ,\ B=\{۱\}\ ,\ C=\{۲\}$

۴ شاید اثبات درستی گزینهٔ ۴ به‌راحتی ممکن نباشد ولی هدف از طراحی این سؤال آن است که گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ را با ارائهٔ مثال نقض به‌راحتی رد کنید. به اثبات درستی این گزاره می‌پردازیم:

$$B\cup C=B\cap C \xrightarrow{B\cap} B\cap(B\cup C)=B\cap(B\cap C)$$
$$\xrightarrow{\text{قانون جذب و تعریف اشتراک}} B=B\cap C\Rightarrow B\subseteq C \quad (I)$$
$$B\cup C=B\cap C \xrightarrow{B\cup} B\cup(B\cup C)=B\cup(B\cap C)$$
$$\xrightarrow{\text{قانون جذب و تعریف اجتماع}} B\cup C=B\Rightarrow C\subseteq B \quad (II)$$
$$(I),(II)\Rightarrow B=C$$

مثال نقض

اگر یک گزاره همواره درست نباشد یعنی **همیشه صادق نیست** و مواردی وجود دارد که درستی آن **نقض** می‌شود. در این مواقع برای اثبات **نادرستی** گزاره در حالت کلی، از **مثال نقض** استفاده می‌کنیم.

ماز

۳۲- چه تعداد از اعداد زیر مربع کامل هستند؟

الف) $۹۹۹۹\times۱۰۰۰۱+۱$ ب) $\frac{۱۶!(۱۵!+۱)}{۴}+۱$ ج) $۴\times۱۰۰۰۰+۱$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ ترکیبی ـ زمان‌بَر ـ گسسته صفحهٔ ۲ ـ ۱۲۰۱)

الف) با دقت به اعداد متوجه می‌شویم که:

$$۹۹۹۹\times۱۰۰۰۱+۱=k(k+۲)+۱=k^۲+۲k+۱=(k+۱)^۲=(۱۰۰۰۰)^۲$$

به عبارت دیگر: $۹۹۹۹\times۱۰۰۰۱+۱=(۱۰۰۰۰-۱)(۱۰۰۰۰+۱)+۱=(۱۰۰۰۰)^۲-۱+۱=(۱۰۰۰۰)^۲$

ب)

$$\frac{۱۶!}{۴}(۱۵!+۱)+۱=۴\times۱۵!(۱۵!+۱)+۱=۴k(k+۱)+۱=۴k^۲+۴k+۱=(۲k+۱)^۲=(۲\times۱۵!+۱)^۲$$

ج)

$$۴۰۰۰۰+۱=۲۰۰^۲+۱$$

این عدد هرگز مربع کامل نیست، زیرا اگر قرار است عددی بعد از $۲۰۰^۲$ مربع کامل باشد، باید $۲۰۱^۲$ باشد که ۴۰۱ واحد از $۲۰۰^۲$ بزرگ‌تر است نه یک واحد!

بنابراین فقط ۲ عدد **مربع کامل** هستند.

ماز

۳۳- به کمک روش «در نظر گرفتن همهٔ حالات» می‌توان ثابت کرد به‌ازای هر عدد صحیح n، عدد ..... عددی فرد است.

۱) $n^۲-۳n+۲$ ۲) $n^۲+۴n+۱$ ۳) $n^۲+۷n-۳$ ۴) $۲n^۲+n+۳$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ گسسته صفحهٔ ۴ ـ ۱۲۰۱)

بررسی گزینه‌ها:

۱

حاصل‌ضرب دو عدد متوالی همواره زوج است و چون $n^۲-۳n+۲=(n-۱)(n-۲)$ حاصل‌ضرب دو عدد متوالی است، **زوج** می‌باشد.

۲) این عدد به‌ازای nهای **فرد**، **زوج** و به‌ازای nهای **زوج**، **فرد** است.

۱) $n=2k \Rightarrow n^2+4n+1=(2k)^2+4(2k)+1=2(2k^2+4k)+1=2q+1$: عددفرد

۲) $n=2k+1 \Rightarrow n^2+4n+1=(2k+1)^2+4(2k+1)+1=2(2k^2+6k+3)=2q'$: عددزوج

۳) n^2+7n-3 همواره فرد است. به روش در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها فرد بودن عبارت موجود در گزینهٔ ۳ را اثبات می‌کنیم. ببینید:

۱) $n=2k \Rightarrow n^2+7n-3=4k^2+14k-3=2(2k^2+7k-1)-1=2q-1$: عددفرد

۲) $n=2k+1 \Rightarrow n^2+7n-3=4k^2+4k+1+14k+7-3=2(2k^2+9k+2)+1=2q'+1$: عددفرد

۴) به‌ازای nهای **فرد**، عددی **زوج** و به‌ازای nهای **زوج**، عددی **فرد** است.

۱) $n=2k \Rightarrow 2n^2+n+3=2(2k)^2+2k+3=2(4k^2+k+1)+1=2q+1$: عددفرد

۲) $n=2k+1 \Rightarrow 2n^2+n+3=2(2k+1)^2+(2k+1)+3=2(4k^2+5k+3)=2q'$: عددزوج

حاصل‌ضرب دو عدد متوالی

از بین دو عدد متوالی همواره قطعا یکی **زوج** است و از آن‌جا که حاصل‌ضرب یک عدد زوج در یک عدد فرد، زوج است، **حاصل‌ضرب دو عدد متوالی همواره زوج است.**

اثبات با درنظر گرفتن همهٔ‌حالت‌ها

برخی اوقات برای اثبات یک حکم، می‌توانیم نشان دهیم که برای **تمام حالت‌های ممکنی** که می‌تواند به وجود آید **حکم برقرار** است. این نوع اثبات معمولا به حکم‌های مربوط به نظریه اعداد برمی‌گردد و با حالت‌بندی تمام اعضای مجموعهٔ مرجع انجام می‌شود. مثلا دسته‌بندی اعداد صحیح به اعداد زوج یا فرد و ...

ماز

۳۴- به روش «در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها» می‌توان ثابت کرد که اگر $n\in\{1,2,...,10\}$ و $\frac{n^2(n-1)^2}{4}$ عددی زوج باشد، آنگاه $n\in A$ می‌باشد. مجموعهٔ A چند عضوی است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۵ ـ ۱۲۰۱)

حل کردن این سؤال در حالت کلی با **بخش‌پذیری** امکان‌پذیر است. اما کتاب که در این مقطع سؤال را مطرح کرده، منظورش استفاده از روش در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها بوده است! یعنی همهٔ اعداد مجموعه را در رابطه قرار دهیم تا متوجه شویم کدام زوج و کدام فرد هستند؟ در بودجه‌بندی‌های بعدی حتماً با حالت گسترده‌تر سؤال مواجه می‌شوید. اما اینجا درست می‌خواهیم به سبک کتاب سؤال را حل کنیم. باید برای n مقادیر ۱ تا ۱۰ را جایگذاری کنیم که وقت‌گیر است. اما اندکی آشنایی با اعداد مثلثی کار ما را راحت‌تر می‌کند. ببینید:

$$\frac{n^2(n-1)^2}{4}=\text{عددزوج} \Rightarrow \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2=\text{عددزوج} \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2}=\text{عددزوج} \Rightarrow \binom{n}{2}=\text{عددزوج}$$

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
$\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$	۰	۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱	۲۸	۳۶	۴۵

همان‌طور که می‌بینید به‌ازای $n=1,4,5,8,9$، خروجی زوج است. پس: $A=\{1,4,5,8,9\}$

مجموعهٔ A ۵ عضوی است.

یه نکتهٔ طلایی!

توان روی زوج یا فرد بودن اعداد **تأثیری ندارد**.

$$n\in\mathbb{N};\quad a=\text{فرد}\Leftrightarrow a^n=\text{فرد}\qquad a=\text{زوج}\Leftrightarrow a^n=\text{زوج}$$

۳۵- n یک عدد طبیعی دلخواه است. آنگاه در مورد عدد $n(-9n^2+50n+92)$ چه می‌توان گفت؟

۱) این عدد همواره مرکب است.

۲) این عدد همواره اول است.

۳) این عدد گاهی اول و گاهی مرکب است.

۴) این عدد اگر اول نباشد، مربع کامل است.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ گسسته صفحهٔ ۳ ـ ۱۲۰۱)

به‌ازای عددی مانند **۲ و ۶** برای n عدد داده‌شده **مرکب** است.

به‌ازای $n=1$ عبارت داده‌شده 1×133 بوده و **مرکب** است چون **بر ۷ بخش‌پذیر** است.

اما اگر $-9n^2+50n+92$ را برابر ۱ قرار دهیم:

$$-9n^2+50n+92=1\Rightarrow -9n^2+50n+91=0\Rightarrow (n-7)(-9n-13)=0\Rightarrow \begin{cases} n=7 \checkmark \\ n=-\frac{13}{9} \times \end{cases}$$

مقدار n برابر **۷** شده و حاصل داده‌شده **عددی اول** می‌شود.

توجه کنید به‌ازای هیچ مقداری از n، عدد $n(-9n^2+50n+92)$ **برابر ۱ نمی‌شود** پس عدد $n(-9n^2+50n+92)$ گاهی **اول** و گاهی **مرکب** است.

۳۶- آیدا می‌خواهد با مثال نقض نشان دهد که گزارهٔ «$\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$» در حوزهٔ اعداد حقیقی نامنفی نادرست است، مثال نقضی انتخاب می‌کند، اما معلمش به او می‌گوید، مثال نقض پیشنهادی او مناسب نیست و این مثال نقض نمی‌تواند گزارهٔ بالا را رد کند. اشکال مثال نقض آیدا، کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) x و y را مساوی هم گرفته است.

۲) حداقل یکی از مقادیر x و y را صفر در نظر گرفته است.

۳) حداقل یکی از مقادیر x و y را یک در نظر گرفته است.

۴) مقادیر x و y را بسیار بزرگ انتخاب کرده است.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۳ ـ ۱۲۰۱)

بررسی گزینه‌ها:

۱) اگر x و y را مساوی درنظر بگیریم:

$$\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}\xrightarrow{x=y}\sqrt{x+x}=\sqrt{x}+\sqrt{x}\Rightarrow\sqrt{2x}=2\sqrt{x}$$

به‌ازای مقادیر مثبت این دو عبارت برابر نخواهند شد.

۲) اگر x **یا** y را **صفر** بگیریم (یا هر دو را) این رابطه **درست** است. پس **مثال نقض محسوب نمی‌شود**.

توجه داشته باشیم اگر معادله را حل کنیم به همین می‌رسیم:

$$\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}\Rightarrow(\sqrt{x+y})^2=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\Rightarrow x+y=x+y+2\sqrt{x}\sqrt{y}$$

$\Rightarrow ۲\sqrt{xy}=۰ \Rightarrow \sqrt{xy}=۰ \Rightarrow x=۰$ یا $y=۰$

۳) به وضوح در این حالت دو طرف تساوی برابر نیستند و یک مثال نقض درست است.

$$\sqrt{x+۱}=\sqrt{x}+\sqrt{۱}$$

۴) بزرگ بودن مثال نقض دلیلی بر ناکارآمدی یا نادرستی آن نیست و اعداد خیلی بزرگ هم می‌توانند مثال نقض باشند.

ماز

۳۷- برای درستی گزارهٔ «حاصل عبارت $(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})(a^۳-۸a^۲+۷a)$ به‌ازای جمیع مقادیر طبیعی برای a، عددی گنگ می‌شود.» چند مثال نقض وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۵ ـ ۱۲۰۱)

تنها عدد **گویایی** که در عدد گنگ ضرب‌شده و حاصل را عدد **گویا** می‌کند عدد گویای **صفر** است. بنابراین مقادیری طبیعی برای a مثال نقض محسوب می‌شوند که حاصل داده‌شده را صفر کنند:

$$a^۳-۸a^۲+۷a=۰ \Rightarrow a(a-۱)(a-۷)=۰ \Rightarrow a=۰ \text{ یا } a=۱ \text{ یا } a=۷$$

پس دو عدد طبیعی ۱ و ۷ **مثال نقض** موردنظر هستند.

اعمال جبری روی اعداد گویا و گنگ

۱) جمع، تفریق و ضرب هر دو عدد **گویا**، عددی **گویاست**.

عدد گویا $\square$ عدد گویا $=$ عدد گویا
$\square$: $+$ یا $-$ یا $\times$

همچنین **تقسیم** هر عدد **گویا** بر عددی **گویا و ناصفر**، عددی **گویاست**.

$$\text{عدد گویا} = \frac{\text{عدد گویا}}{\text{عدد گویای ناصفر}}$$

۲) جمع، تفریق، ضرب و تقسیم هر **دو عدد گنگ**، عددی **گنگ یا گویا** است.

عدد گویا یا عدد گنگ $=$ عدد گنگ $\square$ عدد گنگ
$\square$: $+$ یا $-$ یا $\times$ یا $\div$

۳) جمع یا تفریق یک عدد **گویا** و یک عدد **گنگ**، عددی **گنگ** است.

عدد گنگ $=$ عدد گنگ $\square$ عدد گویا
$\square$: $+$ یا $-$

۴) ضرب یا تقسیم یک عدد **گویا** و یک عدد **گنگ**، یا **گویاست** و **یا گنگ**.

عدد گویا $\square$ عدد گنگ یا عدد گویا $=$ عدد گنگ $\Rightarrow$
- $۰ \square$ عدد گنگ $= ۰$ ($\square$: $\times$ یا $\div$)
- عدد گنگ $=$ عدد گنگ $\square$ عدد گویای ناصفر ($\square$: $\times$ یا $\div$)

۵) معکوس هر عدد **گویای غیرصفر**، عددی **گویاست** و **معکوس** هر عدد **گنگ** نیز، عددی **گنگ** است.

ماز

۳۸- اگر $۲^{۲^n}+۱$ مرکب باشد، آنگاه کوچک‌ترین مقدار طبیعی n کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ گسسته صفحهٔ ۲ ـ ۱۲۰۱)

طبق گفتهٔ کتاب درسی اولین مثال عددی برای **مرکب** بودن این عدد، $n=۵$ است. ببینید:

$$n=۵ \Rightarrow ۲^{۲^۵}+۱=۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷=۶۴۱\times ۶۷۰۰۴۱۷$$

ماز

۳۹- می‌خواهیم حکم زیر را در حوزهٔ اعداد صحیح اثبات کنیم.

حکم: اگر ab عددی فرد باشد، آنگاه $a^۲+b^۲$ عددی زوج است.

برای این اثبات، از روش در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها ..... و می‌توانیم a را مساوی با ..... و b را مساوی با ..... در نظر بگیریم.

۱) استفاده می‌کنیم ـ $۲k+۱$ ـ $۲k+۳$

۲) استفاده نمی‌کنیم ـ $۲k+۱$ ـ $۲k+۳$

۳) استفاده می‌کنیم ـ $۲k+۱$ ـ $۲k'+۱$

۴) استفاده نمی‌کنیم ـ $۲k+۱$ ـ $۲k-۱$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ خط‌به‌خط/مفهومی ـ سریع ـ گسسته صفحهٔ ۴ ـ ۱۲۰۱)

توجه داشته باشید وقتی استدلال می‌کنیم که (اگر ab فرد باشد، آنگاه a و b هر دو فردند) داریم از روش «در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها» استفاده می‌کنیم. (چرا؟) از طرفی چون a و b دو عدد فرد مستقل از هم هستند باید جداگانه و مستقل تعریف شوند، مثلاً اگر $a=۲k+۱$ و $b=۲k+۳$، آنگاه اثبات ما درست نیست. زیرا دیگر برای اعداد فرد **دلخواه** اثبات نمی‌کنیم، در این حالت عملاً داریم برای دو عدد فرد **متوالی** اثبات می‌کنیم پس باید دو عدد فرد را **متمایز** یعنی $۲k+۱$ و $۲k'+۱$ در نظر بگیریم.

ضرب اعداد زوج و فرد

در ضرب دو عدد:

۱) اگر **حداقل یکی** از اعداد **زوج** باشد، حاصل‌ضربشان **زوج** است و برعکس.

۲) اگر هر دو عدد **فرد** باشند، حاصل‌ضربشان **فرد** است و برعکس.

رفع ابهام!

پاسخ «چرا؟»: چون برای اثبات این حکم باید ۴ حالت (a زوج، b زوج)، (a زوج، b فرد)، (a فرد، b زوج) و (a فرد، b فرد) را در نظر بگیریم و با محاسبهٔ ab زوجیت آن را تعیین کنیم.

ماز

۴۰- اگر a و b به‌ترتیب مجموع و حاصل‌ضرب n عدد صحیح متوالی باشند، آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) هر دو عدد a و b مضرب n هستند.

۲) هر دو عدد a و b می‌توانند مضرب n نباشند.

۳) a حتماً مضرب n است ولی b می‌تواند مضرب n نباشد.

۴) b حتماً مضرب n است ولی a می‌تواند مضرب n نباشد.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی/خط‌به‌خط ـ سریع ـ گسسته صفحهٔ ۲ و ۳ ـ ۱۲۰۱)

حاصل‌ضرب هر n عدد صحیح متوالی مضرب n است چون در بین هر n عدد صحیح متوالی **دقیقاً یکی مضرب n** است.

ولی **مجموع** n عدد صحیح متوالی لزوماً مضرب n نیست. مثال نقض: مجموع دو عدد صحیح متوالی همیشه **فرد** بوده و نمی‌تواند مضرب ۲ باشد.

نکته!

۱) **حاصل‌ضرب** n عدد صحیح متوالی بر $n!$ بخش‌پذیر است.

۲) اگر n **فرد** باشد، **مجموع** هر n **عدد طبیعی** متوالی بر n **بخش‌پذیر** است.

ماز

بودجه‌بندی این آزمون

فیزیک ۱: فیزیک و اندازه‌گیری - صفحه‌های ۱ تا ۲۲
فیزیک ۳: حرکت بر خط راست (تا قبل از شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای) ـ صفحه‌های ۱ تا ۱۰

سهم در کنکور

پایهٔ دهم: درمجموع ۱ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.
پایهٔ دوازدهم: درمجموع ۱ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.

سلام به همهٔ مازی‌ها...

چند تا نکته رو می‌خوایم قبل از این آزمون بهتون بگیم که کمک کنه دید بهتری نسبت به مباحث این آزمون پیدا و بتونین این مباحث رو با روش درست‌تری مطالعه کنین.

۱- در پایهٔ دوازدهم به مباحث اولیه و مقدماتی حرکت می‌پردازیم که احتمال طرح تست مستقیم ازشون کمه ولی پایه و اساس همهٔ فصل محسوب می‌شن! مهم‌ترین بخش توی این قسمت، **نمودار مکان ـ زمانه** که ما هم ۶ تا از سؤالات آزمون رو به این بخش اختصاص دادیم تا کامل مسلط بشین.

۲- در پایهٔ دهم به فصل یک فیزیک پایهٔ دهم می‌پردازیم. از این فصل یک تست مستقیم توی کنکور دارید که معمولاً از مبحث **چگالی** طرح می‌شه. ۳ تا از سؤالات این آزمون هم به مبحث چگالی اختصاص داره تا با تیپ‌های معروفش آشنا بشین. راستی سؤال آخر آزمون رو دقیق بررسی کنید، چون بر اساس تست کنکور ۱۴۰۵ طرح شده!

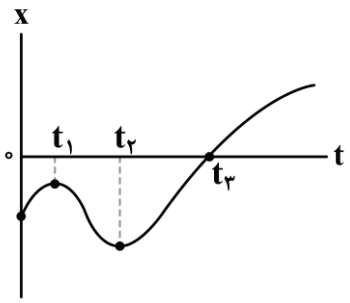
سعید احمدی و سجاد صادقی‌زاده (رتبهٔ ۱ کنکور ۱۳۹۲) - مسئولین درس آزمون‌های تستی فیزیک ماز

۴۱- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. کدام‌یک از عبارت‌های زیر صحیح است؟

الف: در لحظهٔ t_3، جهت حرکت جسم تغییر کرده است.

ب: در بازهٔ $0 < t < t_3$، بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x است.

ج: اندازهٔ بردار مکان متحرک در لحظهٔ t_2 بزرگ‌تر از اندازهٔ بردار مکان آن در لحظهٔ t_1 است.



۱) فقط «الف»
۲) «الف» و «ج»
۳) فقط «ب»
۴) «ب» و «ج»

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۸ ـ ۱۲۰۱)

بررسی موارد:

الف

در لحظهٔ t_3، جهت بردار مکان تغییر کرده است. تغییر جهت حرکت در لحظه‌های t_1 و t_2 رخ داده است. (✗)

ب

در بازهٔ $0 < t < t_3$، نمودار زیر محور زمان است $(x < 0)$؛ بنابراین بردار مکان در خلاف جهت محور x است. (✓)

ج

اندازهٔ بردار مکان برابر با فاصلهٔ جسم از مبدأ محور است. در لحظهٔ t_2، فاصله تا مبدأ بیش‌تر از لحظهٔ t_1 است؛ بنابراین اندازهٔ بردار مکان نیز در لحظهٔ t_2 بزرگ‌تر است. (✓)

از نمودار مکان ـ زمان، چه اطلاعاتی به‌دست می‌آید؟

۱- مکان اولیه: به مکان جسم در لحظهٔ شروع حرکت $(t_0 = 0)$، مکان اولیه می‌گویند و آن را با x_0 نشان می‌دهند. در نمودار مکان ـ زمان، x_0 نقطه‌ای است که نمودار محور xها را قطع می‌کند.

۲- مکان متحرک در هر لحظهٔ دلخواه t: هر نقطه از نمودار نشان می‌دهد که متحرک در هر لحظهٔ دلخواه t، در چه مکانی قرار دارد.

۳- بیش‌ترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ مختصات: توجه کنید که وقتی بیش‌ترین فاصله را بخواهیم، این فاصله هم می‌تواند در xهای مثبت و هم در xهای منفی باشد. پس بیش‌ترین مقداری را که x دارد (بیش‌ترین فاصله از محور t)، از روی نمودار تعیین می‌کنیم.

۴- در چه بازهٔ زمانی متحرک در جهت محور x یا خلاف جهت محور x حرکت می‌کند: در هر بازهٔ زمانی که شیب نمودار مثبت (نمودار رو به بالا) باشد، متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند و در هر بازهٔ زمانی که شیب نمودار منفی (نمودار رو به پایین) باشد، متحرک خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.

۵- لحظهٔ تغییر جهت حرکت: لحظه‌هایی که نمودار، بیشینه و کمینه است، لحظهٔ تغییر جهت حرکت است. در این لحظات علامت شیب نمودار تغییر می‌کند.

۶- لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان متحرک: در لحظه‌ای که نمودار از روی محور t عبور می‌کند ($x=0$) می‌شود و علامت آن تغییر می‌کند)، بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد.

۷- در چه بازهٔ زمانی، متحرک به مبدأ مختصات نزدیک یا از آن دور می‌شود: در بازه‌های زمانی که نمودار به محور t نزدیک می‌شود، متحرک به مبدأ مختصات ($x=0$) نزدیک می‌شود و در بازه‌های زمانی که نمودار از محور t دور می‌شود، متحرک از مبدأ مختصات دور می‌شود.

۸- جابه‌جایی متحرک در یک بازهٔ زمانی: با داشتن مکان اولیه و نهایی در هر بازهٔ زمانی، جابه‌جایی متحرک محاسبه می‌شود:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

۹- مسافت طی‌شده در یک بازهٔ زمانی: اگر متحرک در بازهٔ زمانی موردنظر، تغییر جهت ندهد، مسافت طی‌شده با بزرگی جابه‌جایی برابر است. ولی اگر در بازهٔ موردنظر، نقاط بیشینه یا کمینهٔ نمودار وجود داشته باشد، ابتدا جابه‌جایی را از ابتدای بازه تا لحظهٔ تغییر جهت و سپس از لحظهٔ تغییر جهت تا انتهای بازه محاسبه می‌کنیم. سپس قدر مطلق جابه‌جایی‌ها را جمع می‌کنیم تا مسافت طی‌شده محاسبه شود.

$$\ell = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + \cdots$$

۱۰- توقف متحرک در یک بازهٔ زمانی: در بازه‌های زمانی که نمودار مکان ـ زمان به‌صورت یک خط صاف و افقی است، متحرک توقف کرده است.

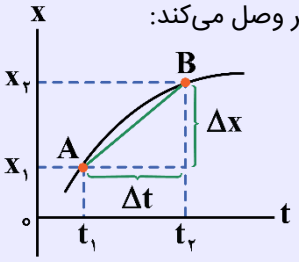
۱۱- سرعت متوسط و تندی متوسط: پس از محاسبهٔ جابه‌جایی و مسافت طی‌شده، می‌توانیم سرعت متوسط و تندی متوسط را در بازهٔ زمانی موردنظر محاسبه کنیم:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

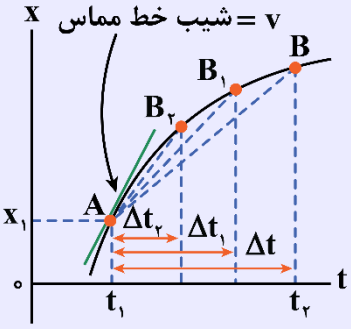
$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$$

البته برای محاسبهٔ سرعت متوسط می‌توان از روش‌های هندسی هم کمک گرفت.

به نمودار مکان ـ زمان زیر که پاره‌خط بین دو نقطهٔ دلخواه آن مطابق شکل رسم شده است، توجه کنید. همان‌طور که از درس ریاضی می‌دانید نسبت $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ برابر شیب پاره‌خطی است که دو نقطهٔ A و B را به‌هم وصل می‌کند. از سوی دیگر، با توجه به رابطهٔ سرعت متوسط، می‌دانیم که این نسبت برابر سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 است. به این ترتیب، می‌توان نتیجه گرفت که سرعت متوسط متحرک بین دو لحظه از زمان برابر شیب پاره‌خطی است که نقاط نظیر آن دو لحظه در نمودار مکان ـ زمان را به یکدیگر وصل می‌کند:



۱۲- سرعت لحظه‌ای: پیش از این دیدیم که سرعت متوسط متحرک بین هر دو لحظهٔ دلخواه، برابر شیب خطی است که نمودار مکان ـ زمان را در آن دو لحظه قطع می‌کند. همان‌طور که در شکل زیر دیده می‌شود، اگر Δt به‌تدریج کوچک و کوچک‌تر شود، نقطهٔ B به نقطهٔ A نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود؛ به‌طوری که اگر Δt به سمت صفر میل کند $(\Delta t \to 0)$ نقطهٔ B به نقطهٔ A بسیار نزدیک می‌شود و سرانجام خط واصل بین این دو نقطه به خط مماس بر نمودار در نقطهٔ A میل می‌کند. در این حالت، شیب خط مماس برابر سرعت متحرک در لحظهٔ t_1 است. به این ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که سرعت در هر لحظهٔ دلخواه t، برابر شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در آن لحظه است:



نکات

۱- در لحظهٔ تغییر جهت حرکت (نقاط بیشینه و کمینهٔ نمودار مکان ـ زمان)، سرعت متحرک برابر صفر است. همچنین علامت سرعت (علامت شیب خط مماس بر نمودار) در این لحظه عوض می‌شود.

۲- تندی متحرک در هر لحظه، همان اندازهٔ سرعت لحظه‌ای (اندازهٔ شیب مماس بر نمودار مکان ـ زمان در آن لحظه) است.

۳- در لحظه‌ای که علامت مکان جسم عوض می‌شود، در آن لحظه جهت بردار مکان عوض می‌شود.

۱۳- نوع حرکت:

الف) اگر در یک بازهٔ زمانی، تندی متحرک (اندازهٔ شیب مماس بر نمودار مکان ـ زمان) درحال افزایش باشد، حرکت متحرک در آن بازهٔ زمانی را **تندشونده** می‌گویند.

ب) اگر در یک بازهٔ زمانی، تندی متحرک (اندازهٔ شیب مماس بر نمودار مکان ـ زمان) درحال کاهش باشد، حرکت متحرک در آن بازهٔ زمانی را **کندشونده** می‌گویند.

پ) اگر در یک بازهٔ زمانی، تندی متحرک (اندازهٔ شیب مماس بر نمودار مکان ـ زمان) ثابت باشد، حرکت متحرک را در آن بازهٔ زمانی **یکنواخت** می‌گویند.

توجه کنید که اگر هم تندی و هم‌جهت حرکت ثابت باشد (متحرک روی خط راست با تندی ثابت و بدون تغییر جهت حرکت کند)، حرکت را **سرعت ثابت** می‌گوییم.

با کمک نمودار مکان ـ زمان می‌توانیم نوع حرکت متحرک را مشخص کنیم. کافی است ببینیم اندازهٔ شیب نمودار چگونه تغییر می‌کند. اگر اندازهٔ شیب نمودار رو به افزایش باشد، حرکت تندشونده است. اگر اندازهٔ شیب نمودار رو به کاهش باشد، حرکت کندشونده است و اگر اندازهٔ شیب نمودار ثابت باشد (نمودار یک خط راست باشد)، حرکت با سرعت ثابت انجام می‌شود.



۴۲- ماهواره‌ای مسافت ۱۶۸۰ کیلومتر را در مدت ۷ دقیقه در چرخش به دور زمین، می‌پیماید. تندی متوسط آن چند کیلومتر بر ثانیه است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۴ ۳) ۰/۵ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۴ ـ ۱۲۰۱)

طبق رابطهٔ تندی متوسط می‌توانیم بنویسیم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=۷\,min=۴۲۰s]{\ell=۱۶۸۰km} s_{av}=\frac{۱۶۸۰}{۴۲۰}=۴\,\frac{km}{s}$$

راهنمای مسیرت

گاهی بچه‌ها با دیدن چنین سؤالایی می‌گن آخه سؤال به این سادگی مگه توی کنکور هم میاد؟ اتفاقاً هم در کنکور و هم در نهایی، چنین سؤالاتی هم داریم!

مقایسهٔ مسافت و جابه‌جایی، تندی متوسط و سرعت متوسط

۱- در شکل زیر، متحرک از مسیر نشان‌داده‌شده از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رود. در این صورت، طول مسیر واقعی برابر مسافت طی‌شده است و طول پاره‌خطی که نقطهٔ A را به نقطهٔ B وصل می‌کند، برابر اندازهٔ جابه‌جایی متحرک است (درواقع جابه‌جایی، کوتاه‌ترین مسافت میان دو نقطه است). به شکل زیر دقت کنید:



۲- مسافت، کمیتی نرده‌ای است؛ درحالی‌که جابه‌جایی، کمیتی برداری است و جهت دارد.

۳- یکای مسافت و جابه‌جایی، هر دو در SI برابر متر (m) است.

۴- اندازهٔ جابه‌جایی همواره کوچک‌تر یا مساوی مسافت طی‌شده است.

$$|\vec{d}|\le\ell$$

۵- در شرایطی جابه‌جایی و مسافت هم‌اندازه هستند که متحرک تغییر جهت ندهد و روی خط راست حرکت کند.

یه نمونهٔ باحال

در کدام‌یک از حرکت‌های زیر، مسافت طی‌شده برابر اندازهٔ جابه‌جایی متحرک است؟

الف: اتومبیلی که در مسیر مستقیم به سمت شمال حرکت می‌کند.

ب: اتومبیلی که ابتدا در مسیر مستقیم به سمت شمال حرکت می‌کند و سپس در مسیر مستقیم به سمت شرق می‌رود.

پ: ماهواره‌ای که در مسیر دایره‌ای دور کرهٔ زمین می‌چرخد.

ت: شناگری که طول استخر را شنا می‌کند و دوباره به مکان اولیهٔ خود برمی‌گردد.

پاسخ تشریحی: مطابق نکات فوق، برای آن‌که در حرکتی، مسافت طی‌شده هم‌اندازهٔ جابه‌جایی باشد، حرکت باید بدون هیچ‌گونه تغییر جهتی انجام شود و در مسیر مستقیم باشد. در بین عبارت‌های داده‌شده، فقط در عبارت «الف» متحرک روی خط راست و بدون تغییر جهت حرکت می‌کند.

۶- با تقسیم مسافت طی‌شده بر زمان حرکت، تندی متوسط حرکت به‌دست می‌آید:

$$s_{av}=\frac{\text{مسافت}}{\text{زمان}}=\frac{\ell}{\Delta t}$$

۷- با تقسیم جابه‌جایی بر زمان حرکت، سرعت متوسط به‌دست می‌آید:

$$\vec{v}_{av}=\frac{\text{بردار جابه‌جایی}}{\text{زمان}}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}$$

۸- تندی متوسط، کمیتی نرده‌ای است، درحالی‌که سرعت متوسط، کمیتی برداری است.

۹- اندازهٔ سرعت متوسط همواره کوچک‌تر یا مساوی تندی متوسط است. هنگامی این دو کمیت هم‌اندازه هستند که متحرک روی مسیر مستقیم بدون تغییر جهت حرکت کند.

۱۰- در حرکت بر روی محور x برای محاسبهٔ جابه‌جایی و سرعت متوسط داریم:

$$\vec{d}=\Delta\vec{x}=\vec{x}_۲-\vec{x}_۱$$

$$\Rightarrow\vec{v}_{av}=\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$$

۴۳- کدام‌یک از عبارت‌های زیر نادرست است؟

۱) در حرکت بر روی خط راست و بدون تغییر جهت، مسافت طی‌شده همواره برابر با اندازهٔ جابه‌جایی است.

۲) عقربهٔ تندی‌سنج خودرو، تندی لحظه‌ای خودرو را نشان می‌دهد و اطلاعاتی در مورد جهت حرکت آن نمی‌دهد.

۳) در حرکت بر روی خط راست، اگر بردارهای مکان و سرعت هم‌جهت باشند، تندی متحرک درحال افزایش است.

۴) تندی متوسط کمیتی نرده‌ای است، درحالی‌که سرعت متوسط کمیتی برداری است.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۹ ـ ۱۲۰۱)

نکته

در حرکت بر روی خط راست، اگر بردارهای مکان و سرعت هم‌جهت باشند، متحرک درحال دوری از مبدأ مکان است.

بررسی گزینه‌ها:

۱) شرط هم‌اندازه بودن مسافت و جابه‌جایی، حرکت بر خط راست و بدون تغییر جهت است. (✓)

۲) با توجه به این‌که تندی کمیتی نرده‌ای است، عقربهٔ تندی‌سنج اطلاعاتی در مورد جهت حرکت به ما نمی‌دهد. (✓)

۳) هم‌جهت بودن بردارهای مکان و سرعت به معنی دور شدن از مبدأ مکان و بزرگ‌تر شدن اندازهٔ بردار مکان است و اطلاعاتی از تغییر تندی به ما نمی‌دهد. (✗)

۴) تندی کمیتی نرده‌ای و سرعت کمیتی برداری است. (✓)

۴۴- معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند در SI به‌صورت $x=۳t^۲-۱۲t+۶$ است. سرعت متوسط متحرک در ۲ ثانیهٔ اول حرکت چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۶ ۴) -۶

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵ ـ ۱۲۰۱)

کام اول

مکان متحرک را در این دو لحظه محاسبه می‌کنیم.

$$x=۳t^۲-۱۲t+۶\Rightarrow\begin{cases}t_۱=۰: x_۱=۰-۰+۶=۶m\\ t_۲=۲s: x_۲=۳\times۲^۲-۱۲\times۲+۶=-۶m\end{cases}$$

کام آخر

سرعت متوسط در ۲ ثانیهٔ اول برابر است با:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{-۶-۶}{۲-۰}=-۶\frac{m}{s}$$

معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت بر خط راست

یکی از روش‌های تعیین مکان جسم در هر لحظهٔ دلخواه t، استفاده از معادلهٔ مکان ـ زمان است. معادلهٔ مکان ـ زمان، مکان جسم را به‌صورت تابعی از زمان نشان می‌دهد:

$$x=f(t)$$

برای مثال، فرض کنیم که معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی در SI به‌صورت $x = t^۲ - ۶t + ۸$ باشد. با کمک معادلهٔ مکان ـ زمان می‌توان نکات زیر را در مورد حرکت این متحرک فهمید:

۱- مکان متحرک در هر لحظه: با جایگذاری هر لحظهٔ دلخواه در معادلهٔ مکان ـ زمان، مکان متحرک در آن لحظه به‌دست می‌آید. مثلاً برای معادلهٔ داده‌شده:

$$t_۱ = ۱s \Rightarrow x_۱ = ۱^۲ - (۶ \times ۱) + ۸ = ۳m$$

$$t_۲ = ۶s \Rightarrow x_۲ = ۶^۲ - (۶ \times ۶) + ۸ = ۸m$$

۲- جابه‌جایی: با پیداکردن مکان در دو لحظهٔ متفاوت، می‌توان جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی بین این دو لحظه را به‌دست آورد. مثلاً برای معادلهٔ داده‌شده:

$$\begin{cases} t_۱ = ۱s : x_۱ = ۳m \\ t_۲ = ۶s : x_۲ = ۸m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_۲ - x_۱ = ۸ - ۳ = ۵m$$

۳- سرعت متوسط: با تقسیم جابه‌جایی به طول بازهٔ زمانی، سرعت متوسط به‌دست می‌آید. مثلاً برای معادلهٔ داده‌شده:

سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۱s$ تا $t_۲ = ۶s$: $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۵}{۶ - ۱} = ۱\frac{m}{s}$

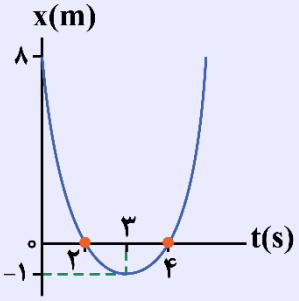
۴- تعیین لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان: دیدیم که بردار مکان جسم در هر لحظه، برداری است که مبدأ مختصات را به مکان جسم در آن لحظه وصل می‌کند؛ بنابراین در لحظه‌ای که متحرک از روی مبدأ مختصات عبور کند، جهت بردار مکان متحرک عوض می‌شود. درنتیجه اگر در معادلهٔ مکان ـ زمان، $x = ۰$ قرار دهیم، لحظهٔ موردنظر به‌دست می‌آید. البته باید توجه کنید که علاوه‌بر شرط $x = ۰$، در این لحظه علامت x نیز باید عوض شود. مثلاً برای معادلهٔ داده‌شده، کافی است معادله را تعیین علامت کنیم. برای این کار ریشه‌های آن را محاسبه می‌کنیم:

t		۲		۴	
x	+	۰	-	۰	+

$$x = t^۲ - ۶t + ۸ = (t - ۲)(t - ۴) \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۲s \\ t_۲ = ۴s \end{cases}$$

بنابراین در لحظات $t_۱ = ۲s$ و $t_۲ = ۴s$، جهت بردار مکان عوض می‌شود.

۵- علاوه‌بر کمیت‌های قبلی، می‌توان کمیت‌هایی **مثل مسافت طی‌شده**، **تندی متوسط**، **لحظات تغییر جهت حرکت** و ... را هم از روی معادلهٔ مکان ـ زمان به‌دست آورد که این کارها را برای حالت خاص معادلهٔ مکان ـ زمان درجهٔ ۲ در بخش‌های بعدی انجام خواهیم داد؛ اما اینجا به‌خاطر داشته باشید که اگر بتوانیم معادلهٔ مکان ـ زمان داده‌شده را رسم کنیم، می‌توان با کمک نکات مربوط به **نمودار مکان ـ زمان** به‌سادگی این کمیت‌ها را به‌دست آورد. مثلاً برای معادلهٔ داده‌شده، اگر آن را رسم کنیم، داریم:

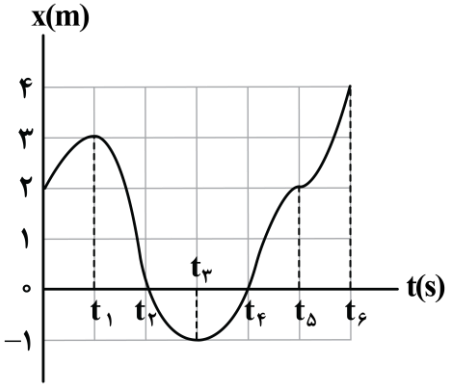


$$x = t^۲ - ۶t + ۸ \Rightarrow x = (t - ۲)(t - ۴)$$

مسافت طی‌شده در ۴ ثانیهٔ اول: $\ell = ۹ + ۱ = ۱۰m$

تندی متوسط در ۴ ثانیهٔ اول: $s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{۱۰}{۴} = ۲/۵\frac{m}{s}$

۴۵- **با توجه به نمودار مکان ـ زمان شکل زیر، کدام‌یک از موارد زیر در مدت‌زمان نشان‌داده‌شده درست بیان شده‌اند؟**



الف: بردار مکان متحرک دو مرتبه تغییر جهت می‌دهد.

ب: متحرک سه مرتبه متوقف می‌شود.

ج: متحرک دو مرتبه در فاصلهٔ نیم متری از مبدأ مکان قرار می‌گیرد.

د: بردار سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا t_6، در جهت محور x است.

۱) «الف»، «ب» و «د»

۲) «الف»، «ب» و «ج»

۳) «ب»، «ج» و «د»

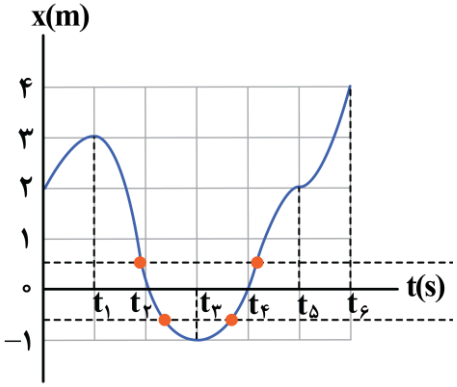
۴) «الف»، «ج» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ نموداری ـ سریع ـ صفحهٔ ۸ ـ ۱۲۰۱)

بررسی موارد:

الف

در دو لحظهٔ t_2 و t_4، علامت مکان متحرک عوض شده و درنتیجه جهت بردار مکان متحرک تغییر کرده است. (✓)



ب

در سه لحظهٔ t_1، t_3 و t_5، شیب مماس بر نمودار مکان ـ زمان (سرعت لحظه‌ای متحرک) صفر بوده و متحرک متوقف شده است. (✓)

ج

$x = \pm 0/5\,m$ **چهار** مرتبه رخ می‌دهد. (✗)

د

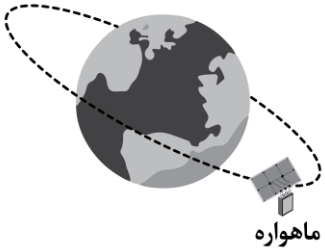
بردار سرعت متوسط هم‌جهت با بردار جابه‌جایی است. با توجه به این‌که در بازهٔ زمانی صفر تا t_6، بردار جابه‌جایی در جهت مثبت محور x است $(x_{t_6} > x_0)$، درمی‌یابیم بردار سرعت متوسط در جهت محور x است. (✓)

جرقهٔ ذهنی

اگر یک نگاه کلی به چهار مورد مطرح‌شده بندازین، با مشاهدهٔ نادرست بودن مورد «ج» می‌تونستین هر سه گزینهٔ (۲)، (۳) و (۴) رو رد کنین و به‌راحتی به گزینهٔ (۱) برسین.

ماز

۴۶- **مطابق شکل، ماهواره‌ای در فاصلهٔ ۹۶۰۰ کیلومتری از سطح زمین، در یک مسیر دایره‌ای به دور زمین می‌چرخد. در مدتی که ماهواره نیمی از مسیر دایره‌ای را می‌پیماید، بزرگی جابه‌جایی آن ..... کیلومتر ..... از مسافت طی‌شده است. ($\pi \simeq 3$ و شعاع زمین 6400km است.)**



۱) ۹۶۰۰، کم‌تر

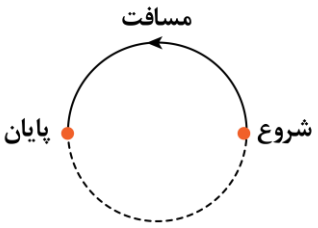
۲) ۹۶۰۰، بیش‌تر

۳) ۱۶۰۰۰، کم‌تر

۴) ۱۶۰۰۰، بیش‌تر

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳ ـ ۱۲۰۱)

شعاع مسیر دایره‌ای حرکت ماهواره برابر با فاصلهٔ آن از مرکز زمین است:



$$r = \underbrace{R_e}_{\text{شعاع زمین}} + \underbrace{h}_{\text{ارتفاع}} = ۶۴۰۰ + ۹۶۰۰ = ۱۶۰۰۰\text{km}$$

$$d = ۲r = ۲ \times ۱۶۰۰۰ = ۳۲۰۰۰\text{km}$$

$$\ell = \frac{\text{محیط دایره}}{۲} = \pi r = ۳ \times ۱۶۰۰۰ = ۴۸۰۰۰\text{km}$$

بنابراین اندازهٔ جابه‌جایی 16000km کوچک‌تر از مسافت طی‌شده است.

جرقهٔ ذهنی

همون اول گزینه‌های (۲) و (۴) رو حذف کن. مگه می‌شه جابه‌جایی بزرگ‌تر از مسافت باشه!

ماز

۴۷- در جدول زیر، فرض کنید هر دو متحرک در مدت‌زمان $4/0\text{s}$ فاصلهٔ بین مکان آغازین و مکان پایانی را طی می‌کنند. قسمت‌های (۱) و (۲) به‌ترتیب از راست به چپ توسط کدام گزینه به‌درستی کامل می‌شوند؟

	مکان آغازین	مکان پایانی	سرعت متوسط
متحرک A	$(-2/0\text{m})\vec{i}$	$(6/4\text{m})\vec{i}$	(۱)
متحرک B	$(-1/4\text{m})\vec{i}$	(۲)	$(2/4\frac{\text{m}}{\text{s}})\vec{i}$

۱) $(2/1\frac{\text{m}}{\text{s}})\vec{i}$ ، $(11\text{m})\vec{i}$

۲) $(2/1\frac{\text{m}}{\text{s}})\vec{i}$ ، $(8/2\text{m})\vec{i}$

۳) $(1/1\frac{\text{m}}{\text{s}})\vec{i}$ ، $(11\text{m})\vec{i}$

۴) $(1/1\frac{\text{m}}{\text{s}})\vec{i}$ ، $(8/2\text{m})\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵ ـ ۱۲۰۱)

گام اول

ابتدا متحرک A را بررسی می‌کنیم:

$$\Delta x = x_۲ - x_۱ = ۶/۴ - (-۲) = ۸/۴\text{m}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۸/۴}{۴} = ۲/۱\frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \vec{v}_{av} = (۲/۱\frac{\text{m}}{\text{s}})\vec{i}$$

گام آخر

در ادامه متحرک B را بررسی می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow ۲/۴ = \frac{\Delta x}{۴} \Rightarrow \Delta x = ۹/۶\text{m}$$

$$\Delta x = x_۲ - x_۱ \Rightarrow ۹/۶ = x_۲ - (-۱/۴) \Rightarrow x_۲ = ۸/۲\text{m} \Rightarrow \vec{x}_۲ = (۸/۲\text{m})\vec{i}$$

راهنمای مسیرت

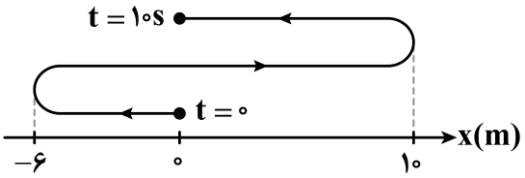
این تست که از دل کتاب درسی براتون طرح شده، هم برای امتحان نهایی و هم برای کنکورتون شانس مطرح شدن بالایی داره!

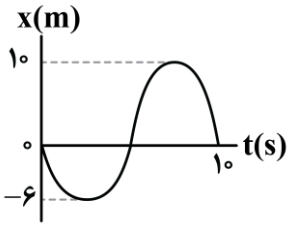
سوتی‌های پرتکرار

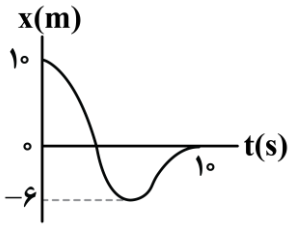
اگر در محاسبات مربوط به متحرک B سوتی محاسباتی بدین در دام گزینهٔ (۱) می‌افتین.

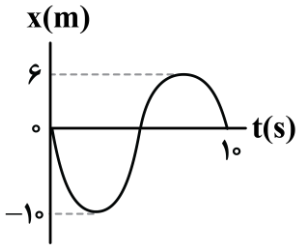
ماز

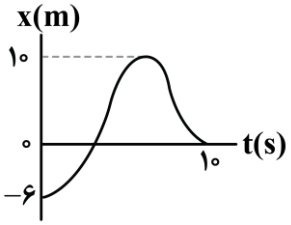
۴۸- مسیر حرکت متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. نمودار مکان ـ زمان آن مطابق کدام گزینه می‌تواند باشد؟



۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ نموداری ـ سریع ـ صفحهٔ ۶ ـ ۱۲۰۱)

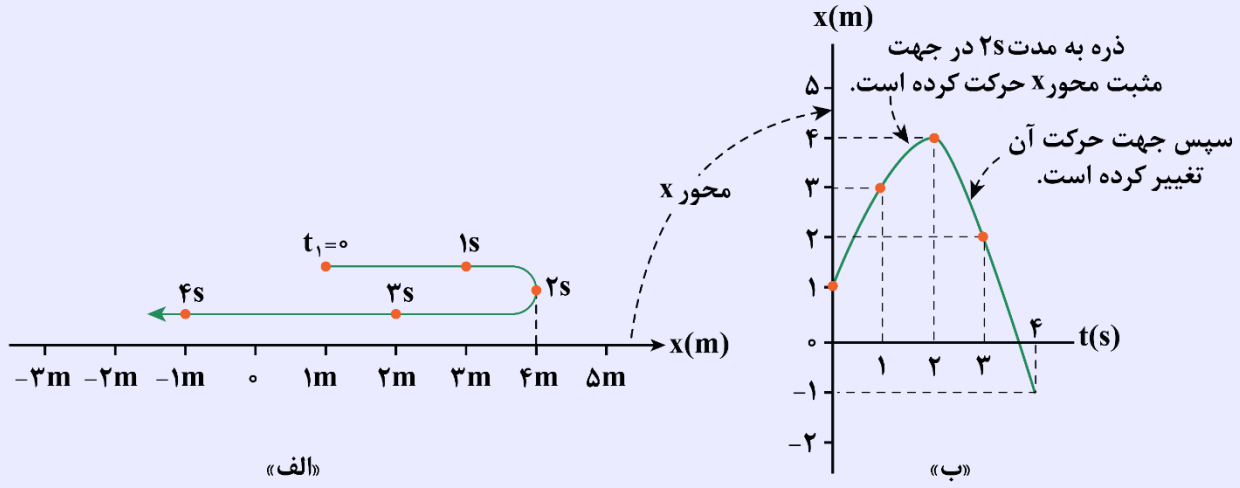
متحرک از مکان $x=0$ در لحظهٔ $t=0$ شروع به حرکت کرده و در خلاف جهت محور x جابه‌جا می‌شود تا به مکان $x=-6m$ برسد، سپس تغییر جهت داده و در جهت محور x حرکت می‌کند و از مبدأ مکان گذشته و به مکان $x=10m$ می‌رسد. در ادامه متحرک دوباره تغییر جهت داده و به سمت مبدأ مکان برمی‌گردد و در لحظهٔ $t=10s$ به مبدأ مکان $(x=0)$ بازمی‌گردد. چنین ویژگی‌هایی در نمودار گزینهٔ (۱) رعایت شده است.

راهنمای مسیرت

بچه‌ها این‌که ما از روی مسیر حرکت یک‌بعدی بتونیم نمودار مکان ـ زمان رو رسم کنیم یا برعکس، خیلی مورد مهم و قابل‌توجهی هست که به درک ما از نحوهٔ حرکت متحرک برمی‌گرده و حتماً باید تسلط خوبی به این مورد داشته باشین.

توصیف یک حرکت با نمودار مکان ـ زمان

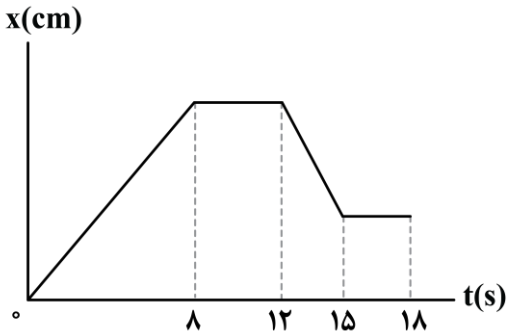
برای توصیف حرکت یک جسم می‌توان از نمودار مکان ـ زمان، که مکان جسم را در هر لحظه نشان می‌دهد، استفاده کرد. برای رسم این نمودار، زمان را روی محور افقی و مکان را روی محور قائم درنظر می‌گیریم. برای مثال، به حرکت ذره‌ای که در شکل «الف» نشان داده شده است، توجه کنید. این ذره در لحظهٔ $t_1=0$ در مکان $x_1=1/0m$، در لحظهٔ $t_2=1/0s$ در مکان $x_2=3/0m$ قرار دارد و به همین ترتیب در لحظه‌های دیگر در مکان‌های دیگر. اگر بخواهیم نمودار مکان ـ زمان حرکت این ذره را رسم کنیم، ابتدا هر یک از محورهای مکان و زمان را با مقیاسی مناسب مدرّج می‌کنیم. سپس نقاطی از نمودار را که مربوط به هر یک از زمان‌ها و مکان‌های داده شده است، در صفحهٔ $x-t$ مشخص می‌کنیم و با وصل کردن این نقاط به‌هم، به‌وسیلهٔ یک منحنی (خم) هموار، نمودار مکان ـ زمان را همانند شکل «ب» رسم می‌کنیم.



«ب» نمودار مکان ـ زمان متحرک

«الف» مسیر حرکت ذره در امتداد محور x

۴۹- شکل زیر، نمودار مکان ـ زمان مورچه‌ای را نشان می‌دهد که در راستای محور x در حرکت است. تندی اولیهٔ مورچه $۷/۵\frac{cm}{s}$ است و مورچه با فاصلهٔ زمانی ۷ ثانیه، دو بار از فاصلهٔ ۴۵ سانتی‌متری مبدأ عبور می‌کند. کل مسافت طی‌شده توسط مورچه چند سانتی‌متر است؟



۱) ۹۰

۲) ۱۰۵

۳) ۱۲۰

۴) ۱۳۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۸ ـ ۱۲۰۱)

راه نجات سریع

اول به کمک شیب خط در بازهٔ صفر تا ۸s، مکان لحظهٔ ۸s و لحظه‌ای که مکان ۴۵cm می‌شه رو به‌دست بیار. بعدش با استفاده از اختلاف زمانی دو لحظهٔ t_1 و t_2 که در اطلاعات سؤال داده شده، دومین لحظه‌ای که مکان ۴۵cm می‌شه رو به‌دست بیار و به کمک اون شیب نمودار در بازهٔ ۱۲s تا ۱۵s رو حساب کن. درنهایت با داشتن مقدار جابه‌جایی از صفر تا ۸s و از ۱۲s تا ۱۵s مسافت طی‌شده در کل حرکت رو حساب کن.

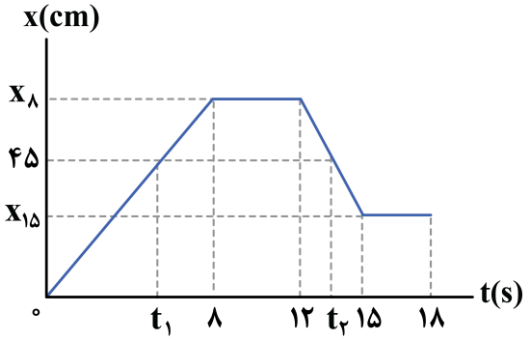
کام اول

محاسبهٔ مکان مورچه در لحظهٔ $t = ۸s$ $(x_۸)$:

با توجه به نمودار، حرکت مورچه در بازهٔ زمانی صفر تا ۸s به‌صورت یکنواخت (با تندی ثابت $۷/۵\frac{cm}{s}$) است؛ بنابراین در بازهٔ زمانی صفر تا ۸s مورچه به‌اندازهٔ $\Delta x = v\Delta t = ۷/۵ \times ۸ = ۶۰cm$ جابه‌جا شده و در لحظهٔ $t = ۸s$ به مکان $x = ۶۰cm$ می‌رسد.

گام دوم

محاسبهٔ زمان‌های مربوط به $x = ۴۵cm$ $(t_۲, t_۱)$:



با توجه به تندی $۷/۵\frac{cm}{s}$ در بازهٔ صفر تا $۸s$ داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow ۷/۵ = \frac{۴۵ - ۰}{t_۱ - ۰} \Rightarrow t_۱ = ۶s$$

درنتیجه، با توجه به اختلاف زمانی $۷s$ بین $t_۱$ و $t_۲$ داریم:

$$t_۲ = t_۱ + ۷ = ۱۳s$$

گام سوم

محاسبهٔ مکان مورچه در لحظهٔ $t = ۱۵s$ $(x_{۱۵})$:

در بازهٔ زمانی $۱۲s$ تا $۱۵s$، مورچه با سرعت ثابت و منفی حرکت می‌کند؛ بنابراین داریم:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۴۵ - x_۸}{t_۲ - ۱۲} = \frac{۴۵ - ۶۰}{۱۳ - ۱۲} = -۱۵\frac{cm}{s}$$

بنابراین، در بازهٔ زمانی $۱۲s$ تا $۱۵s$ جابه‌جایی مورچه برابر است با:

$$\Delta x = v.\Delta t = -۱۵ \times (۱۵ - ۱۲) = -۴۵cm$$

درنتیجه مورچه از مکان $x_۸ = ۶۰cm$ به مکان $x_{۱۵} = ۱۵cm$ می‌رسد.

گام آخر

محاسبهٔ مسافت طی‌شده در کل ۱۸ ثانیه:

با توجه به مقادیر به‌دست‌آمده، کل مسافت طی‌شده برابر است با:

$$\ell = |۶۰ - ۰| + |۱۵ - ۶۰| = ۶۰ + ۴۵ = ۱۰۵cm$$

راهنمای مسیرت

این سؤال، تست سخت و زمان‌بری هست و اگر نتونستی توی آزمون به جواب برسی ناراحت نباش. سعی کن خوب تحلیلش کنی تا توی آزمونای بعدی قوی‌تر ظاهر بشی.

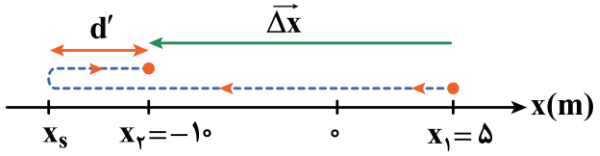
۵۰- خودرویی در لحظهٔ $t_۱$ در جهت منفی محور x از مکان $x_۱ = +۵m$ عبور کرده و در لحظهٔ $t_۲$ در مکان $x_۲ = -۱۰m$ می‌ایستد. در این مدت اندازهٔ جابه‌جایی $\frac{۵}{۱۲}$ مسافت طی‌شده توسط متحرک است. بردار جابه‌جایی متحرک از لحظهٔ $t_۱$ تا لحظه‌ای که بیش‌ترین فاصله از مبدأ مکان رخ می‌دهد در SI کدام است؟ (جهت حرکت متحرک فقط یک بار تغییر کرده است.)

۱) $-۲۵/۵\vec{i}$ ۲) $-۲۰/۵\vec{i}$ ۳) $-۲۲/۵\vec{i}$ ۴) $-۲۱\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵ ـ ۱۲۰۱)

گام اول

با توجه به این‌که متحرک فقط یک بار تغییر جهت داده، مسیر حرکت آن به‌صورت زیر است:



$$|\Delta x| = \frac{5}{12}\ell \Rightarrow 15 = \frac{5}{12}(15+2d') \Rightarrow d' = 10/5\,m$$

(مسافت ↑ ، اندازهٔ جابه‌جایی ↓)

گام دوم

بردار مکان در لحظهٔ توقف را به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{x}_S = -10\vec{i} - 10/5\vec{i} \Rightarrow \vec{x}_S = -20/5\vec{i}\,(m)$$

گام آخر

بردار جابه‌جایی در مدت‌زمان خواسته‌شده برابر است با:

$$\Delta\vec{x} = \vec{x}_S - \vec{x}_1 = -20/5\vec{i} - 5\vec{i} = -25/5\vec{i}\,(m)$$

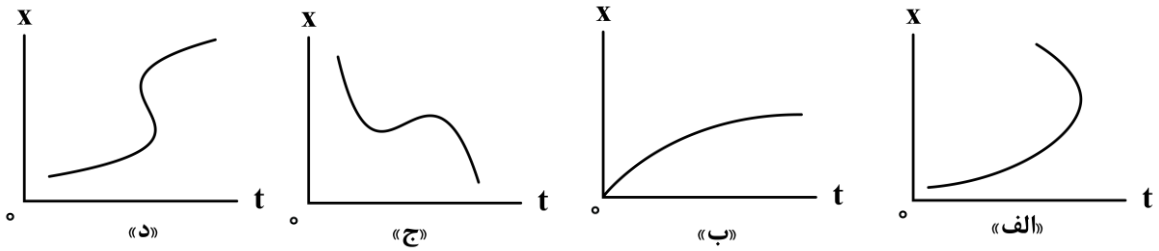
سوتی‌های پرتکرار

اگر حواست به خواستهٔ آخر سؤال نباشه و بی‌دقتی کنی در دام گزینهٔ (۲) می‌افتی.

ماز

۵۱- کدام‌یک از نمودارهای مکان ـ زمان شکل زیر، می‌تواند نشان‌دهندهٔ نمودار $x-t$ یک متحرک باشد؟

۱) فقط «د»
۲) «الف» و «د»
۳) فقط «ج»
۴) «ب» و «ج»



پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۶ ـ ۱۲۰۱)

با توجه به این‌که متحرک در یک لحظه نمی‌تواند در دو مکان مختلف باشد، نمودارهای «الف» و «د» نمی‌توانند نمودار مکان ـ زمان یک متحرک باشند و فقط نمودارهای «ب» و «ج» صحیح هستند.

ویژگی‌های نمودار مکان ـ زمان

۱- همواره تابع است؛ یعنی هر خط موازی محور قائم، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

۲- پیوسته است.

۳- مماس قائم ندارد ← (یعنی این‌طور نباشه)  یا یا

۴- در بازه‌هایی از زمان که نمودار صعودی اکید است، ذره در جهت مثبت محور x حرکت کرده است و در بازه‌هایی از زمان که نمودار نزولی اکید است، ذره در جهت منفی محور x حرکت کرده است.

۵- در لحظه‌هایی که نمودار به‌صورت  یا  است، در آن لحظه‌ها ذره متوقف شده و تغییر جهت حرکت داده است.

۶- در لحظه‌هایی که نمودار به‌صورت  یا  است، در آن لحظه‌ها ذره متوقف شده و بدون تغییر جهت به حرکت خود ادامه داده است.



در همسایگی چپ t'، ذره در جهت محور x درحال حرکت بوده و در لحظهٔ t' متوقف شده و بعد از آن در خلاف جهت محور x به حرکت خود ادامه داده است.



در همسایگی چپ t'، ذره در خلاف جهت محور x درحال حرکت بوده و در لحظهٔ t' متوقف شده و بعد از آن در جهت محور x به حرکت خود ادامه داده است.



در همسایگی چپ t'، ذره در جهت محور x درحال حرکت بوده و در لحظهٔ t' متوقف شده و بعد از آن باز هم در جهت محور x به حرکت خود ادامه داده است.



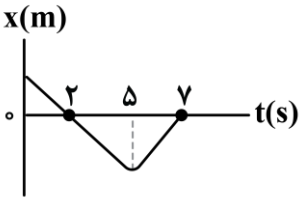
در همسایگی چپ t'، ذره در خلاف جهت محور x درحال حرکت بوده و در لحظهٔ t' متوقف شده و بعد از آن باز هم در خلاف جهت محور x به حرکت خود ادامه داده است.

۷- در ریشه‌های نمودار مکان ـ زمان، ذره در مبدأ $(x=0)$ بوده است. در ریشه‌هایی که علامت نمودار مکان ـ زمان عوض شده ذره از مبدأ عبور کرده و جهت بردار مکان عوض شده است و در ریشه‌هایی که علامت نمودار مکان ـ زمان عوض نشده، ذره به مبدأ رسیده و برگشته است که در این ریشه‌ها، نمودار به شکل قله یا دره بر محور زمان مماس است.

۸- در بازه‌هایی از زمان که نمودار به شکل تابع ثابت است، متحرک ساکن مانده است.

ماز

۵۲- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر تندی متوسط متحرک در این ۷ ثانیه، $۴\frac{m}{s}$ باشد، بیش‌ترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ حرکت چند متر است؟

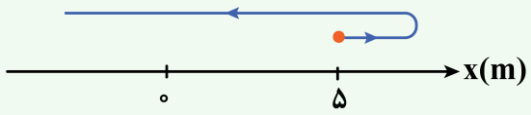


۱) ۷
۲) ۱۰/۵
۳) ۱۷/۵
۴) ۲۸

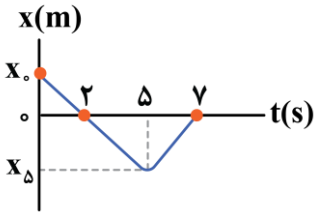
پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶ ـ ۱۲۰۱)

نکته

مبدأ یا مبدأ مکان یعنی $x=0$ و مبدأ حرکت یعنی مکان متحرک در لحظهٔ $t=0$ که همان x_0 است. مثلاً در حرکت زیر، مبدأ حرکت $x_0=5m$ است.



با استفاده از تشابه مثلث‌ها داریم:



$$\frac{x_۰}{۲-۰}=\frac{|x_۵|}{۵-۲}\Rightarrow |x_۵|=\frac{۳}{۲}x_۰\Rightarrow x_۵=-\frac{۳}{۲}x_۰$$

از طرفی:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow ۴=\frac{x_۰+\frac{۳}{۲}x_۰+\frac{۳}{۲}x_۰}{۷}=\frac{۴x_۰}{۷}\Rightarrow x_۰=۷m$$

$$\Rightarrow x_۵=-\frac{۳}{۲}(۷)=-۱۰/۵m$$

بیش‌ترین فاصله از مبدأ حرکت (مکان اولیه) در لحظهٔ $t=۵s$ اتفاق افتاده است:

$$\text{بیش‌ترین فاصله}=۱۰/۵+۷=۱۷/۵m$$

راهنمای مسیرت

استفاده از تشابه مثلث‌ها و قضیهٔ تالس یه جورایی پای ثابت سؤالات نموداری فصل ۱ هست. اگر نتونستین به این سؤال جواب بدین حتماً پاسخ رو به دقت مطالعه کنید تا نحوهٔ کاربرد هندسه در حل رو بلد باشین.

سوتی‌های پرتکرار

اگر به‌اشتباه، بیش‌ترین فاصله از مبدأ مکان رو جواب درست گرفتی، توی دام گزینهٔ (۲) افتادی.

۵۳- متحرکی روی محور x درحال حرکت است. این متحرک مسیر ۸۰ متری را بدون تغییر جهت در مدت ۱۷/۵ ثانیه طی می‌کند. اگر متحرک قسمتی از مسیر را با سرعت $۶\frac{m}{s}$ و بقیهٔ مسیر را با سرعت $۴\frac{m}{s}$ طی کند، چند درصد مسیر حرکت را با سرعت $۴\frac{m}{s}$ پیموده است؟

۱) ۳۵ ۲) ۳۷/۵ ۳) ۶۲/۵ ۴) ۶۵

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۵ ـ ۱۲۰۱)

کام اول

با استفاده از رابطهٔ جابه‌جایی برحسب سرعت متوسط و مدت‌زمان حرکت متحرک می‌توان نوشت:



$$\Delta x_{۱۳}=\Delta x_{۱۲}+\Delta x_{۲۳}\Rightarrow \Delta x_{۱۳}=v_{(av)_۱}\Delta t_۱+v_{(av)_۲}\Delta t_۲$$

$$\Rightarrow ۸۰=۶\Delta t_۱+۴\Delta t_۲\Rightarrow \Delta t_۲+۱/۵\Delta t_۱=۲۰\quad (۱)$$

کام دوم

می‌دانیم $\Delta t_۲+\Delta t_۱=۱۷/۵s$ است؛ بنابراین با استفاده از رابطهٔ دو معادله ـ دو مجهول زیر، $\Delta t_۱$ و $\Delta t_۲$ را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases}\Delta t_۲+\Delta t_۱=۱۷/۵\\ \Delta t_۲+۱/۵\Delta t_۱=۲۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\Delta t_۱=۵s\\ \Delta t_۲=۱۲/۵s\end{cases}$$

کام آخر

مسافتی که متحرک در مدت $\Delta t_۲$ طی کرده را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x_{۲۳}=v_{(av)_۲}\Delta t_۲=۴\times ۱۲/۵=۵۰m$$

محاسبهٔ درصد مسافت: $\frac{\Delta x_{۲۳}}{\Delta x_{۱۳}}\times ۱۰۰=\frac{۵۰}{۸۰}\times ۱۰۰=$ درصد ۶۲/۵

SanjeshCloud

سرعت متوسط متحرک در حرکت چندمرحله‌ای روی خط راست

اگر متحرکی روی محور x (یا خط راست) دارای جابه‌جایی‌های متوالی باشد طوری که در مدت Δt_1، جابه‌جایی Δx_1 با سرعت متوسط v_{av_1} و در مدت Δt_2، جابه‌جایی Δx_2 با سرعت متوسط v_{av_2} و ... داشته باشد، سرعت متوسط آن در کل مسیر برابر می‌شود با:

$$v_{av_{کل}} = \frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t_{کل}} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \cdots}$$

با توجه به رابطهٔ $\Delta x = v_{av}.\Delta t$، داریم:

$$v_{av_{کل}} = \frac{v_{av_1}.\Delta t_1 + v_{av_2}.\Delta t_2 + \cdots}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \cdots} \quad \text{یا} \quad v_{av_{کل}} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots}{\frac{\Delta x_1}{v_{av_1}} + \frac{\Delta x_2}{v_{av_2}} + \cdots}$$

حواستان باشد که اگر Δx یا v_{av} در جهت محور x باشد با علامت مثبت و اگر در خلاف جهت محور x باشد با علامت منفی درنظر گرفته می‌شود.

اگر در هر مرحله، سرعت متحرک ثابت باشد یعنی $v_{av_1} = v_1$، $v_{av_2} = v_2$ و ... آنگاه داریم:

$$v_{av_{کل}} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \cdots} = \frac{v_1\Delta t_1 + v_2\Delta t_2 + \cdots}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \cdots} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots}{\frac{\Delta x_1}{v_1} + \frac{\Delta x_2}{v_2} + \cdots}$$

تأکید می‌کنم این درس‌نامه زمانی صادق است که متحرک بر روی یک مسیر مستقیم حرکت کند!!!

نکته

۱- اگر متحرکی بر روی یک مسیر مستقیم در n بازهٔ زمانی یکسان و متوالی به‌ترتیب با سرعت‌های متوسط v_1، v_2 و ... v_n حرکت کند، داریم:

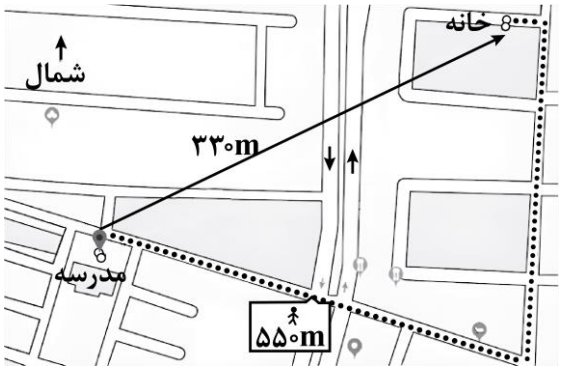
$$v_{av_{کل}} = \frac{v_1 + v_2 + \cdots + v_n}{n}$$

۲- اگر متحرکی مسافت ℓ_1 را در مدت Δt_1 با تندی متوسط s_{av_1}، مسافت ℓ_2 را در مدت Δt_2 با تندی متوسط s_{av_2} و ... طی کند، داریم:

$$s_{av_{کل}} = \frac{\ell_1 + \ell_2 + \cdots}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \cdots} = \frac{s_{av_1}.\Delta t_1 + s_{av_2}.\Delta t_2 + \cdots}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \cdots} = \frac{\ell_1 + \ell_2 + \cdots}{\frac{\ell_1}{s_{av_1}} + \frac{\ell_2}{s_{av_2}} + \cdots}$$

ماز

۵۴- مطابق شکل، فردی فاصلهٔ خانه تا مدرسه را از مسیر نشان‌داده‌شده طی کرده است. اگر در این حرکت، تندی متوسط برابر $۶\frac{km}{h}$ باشد، اندازهٔ سرعت متوسط چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۱

۲) ۳/۶

۳) ۱/۸

۴) ۰/۵

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳ ـ ۱۲۰۱)

کام اول

زمان حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$s_{av} = ۶\frac{km}{h} = \frac{۶}{۳/۶}\frac{m}{s} = \frac{۵}{۳}\frac{m}{s}$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow \frac{۵}{۳} = \frac{۵۵۰}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = ۳۳۰s$$

کام آخر

سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{۳۳۰}{۳۳۰} = ۱\frac{m}{s}$$

جرقهٔ ذهنی

با یک مقایسهٔ ساده بین سرعت متوسط و تندی متوسط داریم:

$$\frac{v_{av}}{s_{av}} = \frac{d}{\ell} \Rightarrow \frac{v_{av}}{\frac{۵}{۳}} = \frac{۳۳۰}{۵۵۰} \Rightarrow v_{av} = ۱\frac{m}{s}$$

سوتی‌های پرتکرار

اگر حواست به یکاها نباشه، توی دام گزینهٔ (۲) میفتی!

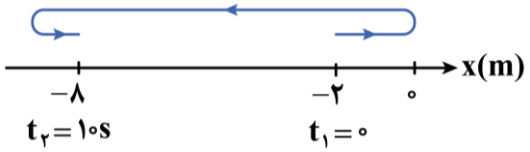
ماز

۵۵- اتومبیلی بر روی محور x در لحظه‌های $t_۱ = ۰$ و $t_۲ = ۱۰s$ به‌ترتیب در مکان‌های $\vec{x}_۱ = (-۲m)\vec{i}$ و $\vec{x}_۲ = (-۸m)\vec{i}$ با سرعت‌های $\vec{v}_۱ = (۳\frac{m}{s})\vec{i}$ و $\vec{v}_۲ = (۱\frac{m}{s})\vec{i}$ حرکت می‌کند. این متحرک حداقل چند بار تغییر جهت داده است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶ ـ ۱۲۰۱)

با توجه به این‌که سرعت متحرک در لحظات $t_۱ = ۰$ و $t_۲ = ۱۰s$، مثبت است، درمی‌یابیم که متحرک در این دو لحظه درحال حرکت به سمت راست است و مسیر حرکت با درنظر گرفتن حداقل تغییر جهت، به‌صورت مقابل است.



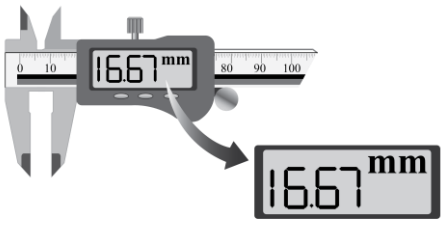
مشخص است که متحرک برای طی این مسیر، باید حداقل دو بار تغییر جهت بدهد.

راهنمای مسیرت

اگر این سؤال رو با استدلال درست به جواب رسوندی، بهت تبریک می‌گم تا اینجای حرکت رو خوب پیش رفتی!

ماز

۵۶- شکل مقابل چه نام دارد و دقت اندازه‌گیری آن چند واحد SI است؟



۱) کولیس، $۱۰^{-۲}$

۲) کولیس، $۱۰^{-۵}$

۳) ریزسنج، $۱۰^{-۲}$

۴) ریزسنج، $۱۰^{-۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۲۱ ـ ۱۰۰۱)

شکل داده‌شده یک کولیس دیجیتال را نشان می‌دهد و دقت اندازه‌گیری آن برابر است با:

$$\text{دقت اندازه‌گیری} = ۰/۰۱\text{mm} = ۱۰^{-۲}\text{mm} = ۱۰^{-۵}\text{m}$$

راهنمای مسیرت

شکل‌های کولیس و ریزسنج رو حتماً یاد بگیر. توی کنکور هم مطرح شده.

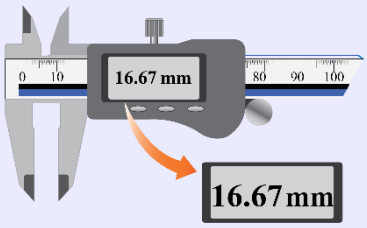
سوتی‌های پرتکرار

حواست به یکا باشه تا توی دام گزینهٔ (۱) نیفتی.

دقت اندازه‌گیری

وسایل اندازه‌گیری به دو دستهٔ رقمی (دیجیتال) و مدرج تقسیم‌بندی می‌شوند. دقت اندازه‌گیری این وسایل به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

۱- وسایل اندازه‌گیری دیجیتال (رقمی): دقت اندازه‌گیری آن‌ها برابر با یک واحد از آخرین رقمی است که می‌خوانند. به شکل‌های زیر دقت کنید:

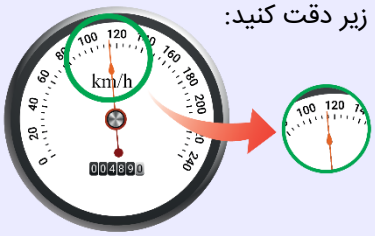


دقت اندازه‌گیری: ۰/۰۱mm



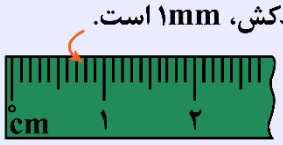
دقت اندازه‌گیری: ۰/۱°C

۲- وسایل اندازه‌گیری مدرج: دقت اندازه‌گیری آن‌ها برابر کمینهٔ درجه‌بندی آن وسیله است. به شکل‌های زیر دقت کنید:



دقت اندازه‌گیری: $۵\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

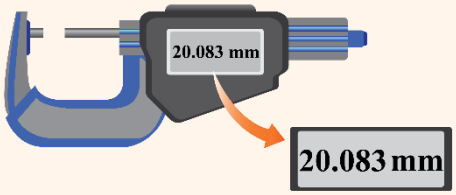
کمینهٔ درجه‌بندی این خط‌کش، ۱mm است.



دقت اندازه‌گیری: ۱mm

یه نمونهٔ باحال

دقت اندازه‌گیری وسیلهٔ زیر چند دسی‌متر است و عدد خوانده‌شده به‌صورت نمادگذاری علمی برابر چند متر است؟ (به‌ترتیب از راست به چپ.)



۱) $۱۰^{-۳}$ و $۲/۰۰۸۳\times۱۰^{-۲}$

۲) $۱۰^{-۳}$ و $۲/۰۰۸۳\times۱۰$

۳) $۱۰^{-۵}$ و $۲/۰۰۸۳\times۱۰^{-۲}$

۴) $۱۰^{-۵}$ و $۲/۰۰۸۳\times۱۰$

پاسخ تشریحی:

دقت اندازه‌گیری وسیلهٔ دیجیتال نشان‌داده‌شده برابر با ۰/۰۰۱mm است که برحسب دسی‌متر برابر است با:

$$\text{دقت اندازه‌گیری} = ۰/۰۰۱\text{mm}\times\frac{۱۰^{-۳}\text{m}}{۱\text{mm}}\times\frac{۱\text{dm}}{۱۰^{-۱}\text{m}} = ۱۰^{-۵}\text{dm}$$

همچنین عدد خوانده‌شده برحسب متر برابر است با:

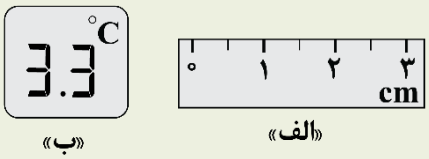
$$\text{عدد خوانده‌شده} = ۲۰/۰۸۳\text{mm} = ۲۰/۰۸۳\times۱۰^{-۳}\text{m} = ۲/۰۰۸۳\times۱۰^{-۲}\text{m}$$

پاسخ: گزینهٔ ۳

آزمون سراسری تجربی ۱۳۹۹

۴۶- دقت وسایل «الف» و «ب» به‌ترتیب کدام است؟

۱) ۰/۳°C ،۱cm
۲) ۰/۱°C ،۱cm
۳) ۰/۳°C ،۰/۵cm
۴) ۰/۱°C ،۰/۵cm



«ب» «الف»

پاسخ تشریحی:

دقت اندازه‌گیری هر وسیله برابر است با:

الف) مدرج ← دقت = ۰/۵cm

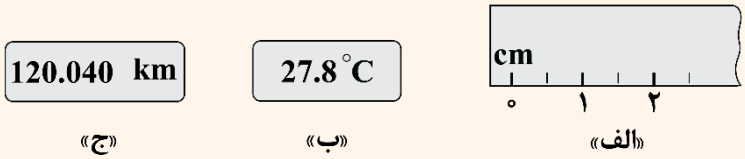
ب) دیجیتال ← دقت = ۰/۱°C

پاسخ: گزینهٔ ۴

یه نمونهٔ باحال

دقت اندازه‌گیری ابزارهای اندازه‌گیری «الف»، «ب» و «پ» در شکل‌های زیر به‌ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱) ۰/۰۱km ،۱°C ،۱cm
۲) ۰/۰۱۰km ،۰/۱°C ،۱cm
۳) ۰/۰۰۱km ،۰/۱°C ،۰/۵cm
۴) ۰/۰۱km ،۱°C ،۰/۵cm



«ج» «ب» «الف»

پاسخ تشریحی:

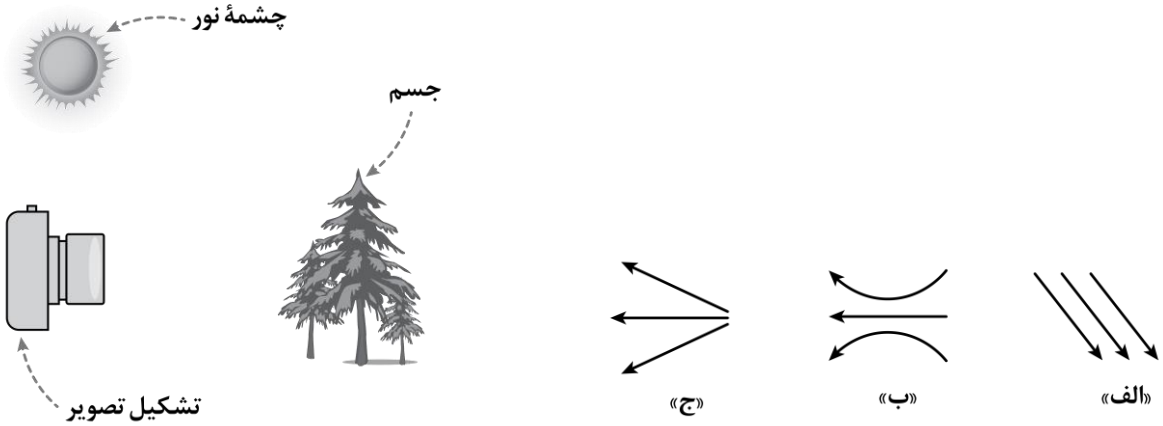
دقت اندازه‌گیری در وسایل مدرج برابر با کمینهٔ تقسیم‌بندی آن ابزار است. در خط‌کش «الف» هر سانتی‌متر به دو قسمت تقسیم شده، پس دقت آن $\frac{1cm}{2} = 0/5cm$ است. دماسنج «ب» و مسافت‌سنج «ج» هر دو دیجیتال هستند و دقت اندازه‌گیری وسایل دیجیتال برابر با یک واحد از آخرین رقمی است که ابزار گزارش می‌کند؛ بنابراین دقت اندازه‌گیری دماسنج ۰/۱°C و دقت اندازه‌گیری مسافت‌سنج ۰/۰۰۱km است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

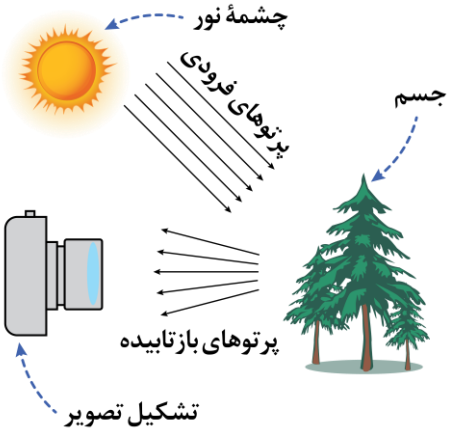
ماز

۵۷- **در شکل زیر که مربوط به مدل‌سازی تشکیل تصویر جسم در یک دوربین عکاسی است، برای مدل‌سازی پرتوهای فرودی از خورشید و پرتوهای بازتابیده از جسم، به‌ترتیب از راست به چپ، کدام شکل‌ها مناسب هستند؟**

۱) «الف» و «ج»
۲) «ج» و «الف»
۳) «الف» و «ب»
۴) «ب» و «الف»



پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ حفظی / مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۶ ـ ۱۰۰۱)



می‌دانیم خورشید یک منبع نور گسترده است و پرتوهای فرودی از آن واگرا هستند. ولی به‌دلیل فاصلهٔ زیاد خورشید از زمین، پرتوهای فرودی از خورشید را به‌صورت موازی مدل‌سازی می‌کنند؛ بنابراین شکل «الف» برای مدل‌سازی پرتوهای فرودی از خورشید مناسب است. پرتوهای موازی خورشید بعد از برخورد به سطح جسمِ نشان‌داده‌شده به‌صورت واگرا بازتاب شده و به دوربین عکاسی می‌رسند؛ بنابراین برای مدل‌سازی پرتوهای بازتابیده از جسم، شکل «ج» مناسب است.

راهنمای مسیرت

این سؤال رو دادیم که حواست به پرسش‌های کتاب و شکل‌هاش باشه.

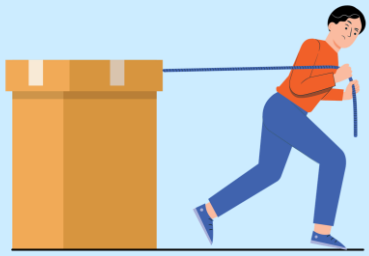
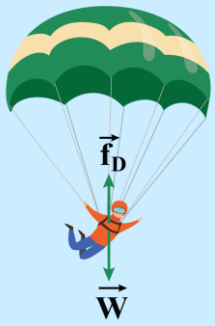
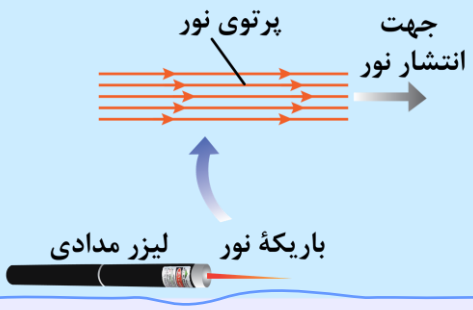
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

مدل‌سازی

۱- برای آن‌که بتوانیم پدیده‌های فیزیکی را تحلیل کنیم، نیاز است تا آن‌ها را به‌گونه‌ای ساده‌سازی کنیم تا امکان تحلیل و بررسی آن‌ها فراهم شود. به این فرایندِ ساده‌سازی پدیده‌ها، مدل‌سازی می‌گوییم.

۲- هنگام مدل‌سازی یک پدیدهٔ فیزیکی، اثرهای جزئی را نادیده می‌گیریم و اثرهای مهم و تعیین‌کننده را در مسئله اِعمال می‌کنیم.

۳- بعضی از مدل‌سازی‌ها که ممکن است در سؤالات با آن‌ها مواجه شوید را در جدول زیر آورده‌ایم.

پدیدهٔ فیزیکی	چگونگی مدل‌سازی
	نیروی گرانشی زمین بر توپ عامل مهمی است و باید حتماً لحاظ شود. عواملی مثل مقاومت هوا، تغییر نیروی گرانشی با تغییر ارتفاع، شکل و ابعاد توپ و چرخش آن عوامل فرعی هستند و می‌توان از آن‌ها صرف‌نظر کرد و توپ را به‌صورت یک جسم نقطه‌ای درنظر گرفت.
هل‌دادن یا کشیدن یک جسم روی سطح افقی 	نیروی دست شخص و نیروی اصطکاک با سطح افقی از عوامل مهم و تأثیرگذار هستند و باید لحاظ شوند. ابعاد جسم و نیروی مقاومت هوا، عوامل جزئی هستند و می‌توانیم آن‌ها را نادیده بگیریم و جسم را به‌صورت نقطه‌ای فرض کنیم.
سقوط چترباز از ارتفاع 	نیروی گرانش زمین، عامل مهم و تأثیرگذاری است و باید درنظر گرفته شود. از طرفی با توجه به ابعاد بزرگ چتر، نیروی مقاومت هوا قابل‌توجه است و باید آن را هم درنظر بگیریم و نمی‌توانیم از مقاومت هوا چشم‌پوشی کنیم.
انتشار نور لیزر مدادی 	با توجه به ابعاد کوچک منبع نور لیزر، می‌توانیم در مدل‌سازی، آن را یک منبع نور نقطه‌ای درنظر بگیریم. پرتوهای نور منتشرشده به مقدار کمی واگرا هستند ولی در مدل‌سازی برای سادگی تحلیل می‌توان آن‌ها را موازی فرض کرد.

یه نمونهٔ باحال

در مدل‌سازی آرمانی حرکت توپ بسکتبال در هوا، چه مواردی باید حتماً درنظر گرفته شوند و از چه مواردی می‌توان صرف‌نظر کرد؟

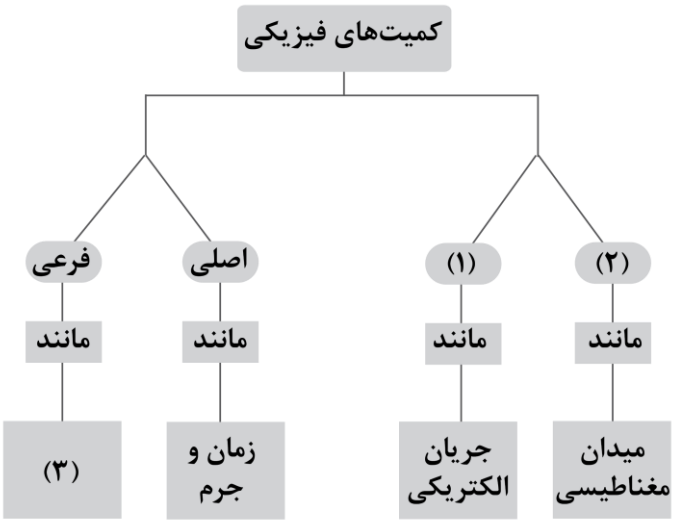
پاسخ تشریحی:

عامل مهم و اساسی در بررسی حرکت توپ بسکتبال، نیروی گرانشی است که زمین به توپ وارد می‌کند و این عامل باید حتماً درنظر گرفته شود، زیرا اگر آن را درنظر نگیریم، توپی که به هوا پرتاب می‌شود، هیچ‌گاه به زمین برنمی‌گردد.

در مقابل، عواملی مثل نیروی مقاومت هوا، تغییر نیروی گرانشی با تغییر ارتفاع، اندازه و شکل توپ و چرخش آن عوامل جزئی هستند و می‌توانیم آن‌ها را نادیده بگیریم؛ به عبارت دیگر می‌توانیم توپ را مانند یک جسم ذره‌ای (نقطه‌ای) درنظر بگیریم. شکل زیر، این مدل‌سازی را نشان می‌دهد:



۵۸- در نقشهٔ مفهومی زیر، کدام‌یک از عبارت‌های مطرح‌شده، خانه‌های (۱)، (۲) و (۳) را به‌درستی تکمیل می‌کند؟



الف: برداری، نرده‌ای، نیروی محرکهٔ باتری

ب: نرده‌ای، برداری، شدت روشنایی

ج: نرده‌ای، برداری، انرژی

د: برداری، نرده‌ای، توان

۱) «الف» و «د»

۲) «ب» و «ج»

۳) «الف» و «ب»

۴) فقط «ج»

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۷ ـ ۱۰۰۱)

گام اول

مثال خانهٔ (۱)، جریان الکتریکی است که کمیتی نرده‌ای می‌باشد. پس خانهٔ (۱) با کلمهٔ «نرده‌ای» تکمیل می‌شود؛ بنابراین موارد «الف» و «د» نادرست بوده و گزینه‌های (۱) و (۳) حذف می‌شوند.

گام دوم

مثال خانهٔ (۲)، میدان مغناطیسی است که کمیتی برداری می‌باشد. پس خانهٔ (۲) با کلمهٔ «برداری» تکمیل می‌شود.

گام آخر

مثال خانهٔ (۳) باید مربوط به یک کمیت فرعی باشد که در مورد «ب»، «شدت روشنایی» یک کمیت اصلی بوده و این مورد نادرست می‌شود؛ اما در مورد «ج»، «انرژی» یک کمیت فرعی بوده و خانهٔ (۳) را به‌درستی تکمیل می‌کند.

بنابراین فقط مورد «ج» درست است.

یکاها و کمیت‌ها

۱- کمیت‌های فیزیکی در سیستم SI به دو گروه اصلی و فرعی تقسیم می‌شوند.

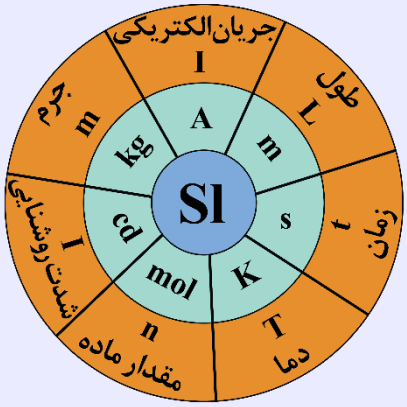
انواع یکاها

- **یکای اصلی**: یکاهایی که مستقل از سایر یکاها می‌باشند و برای تعریف آن‌ها نیازی به سایر یکاها نداریم.
- **یکای فرعی**: یکاهایی که مستقل نبوده و برای تعریف آن‌ها از سایر یکاها استفاده می‌کنیم.

انواع

- **کمیت اصلی**: کمیت‌هایی که مستقل از سایر کمیت‌ها می‌باشند و برای تعریف یکای آن‌ها نیازی به سایر یکاها نداریم.
- **کمیت فرعی**: کمیت‌هایی که به کمیت‌های دیگر وابسته هستند و برای تعریف یکای آن‌ها از سایر یکاها استفاده می‌کنیم.

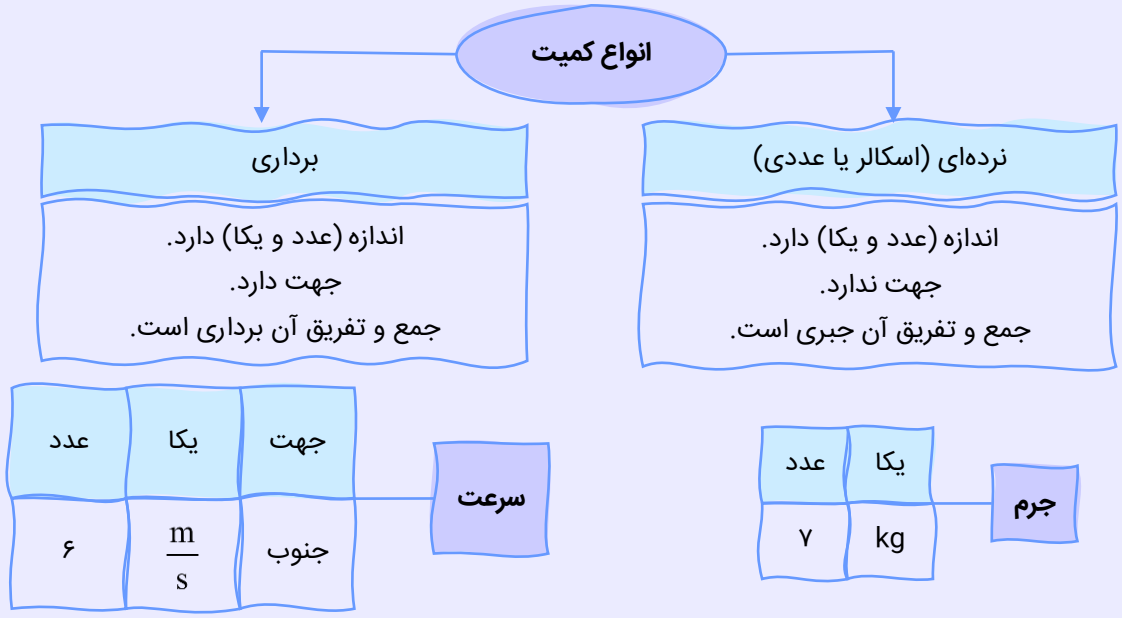
فقط و فقط این ۷ یکا اصلی هستند، غیر از این ۷ یکا بقیه فرعی محسوب می‌شود.



جدول کمیت‌های اصلی که همگی نرده‌ای هستند.

کمیت	نماد	یکای SI	یکای غیر SI
طول	L	متر (m)	اینچ، فوت، سال نوری
جرم	m	کیلوگرم (kg)	گرم، مثقال، تن
زمان	t	ثانیه (s)	دقیقه، ساعت، روز
شدت روشنایی	I	کَندِلا (شمع) (cd)	
جریان الکتریکی	I	آمپر (A)	
مقدار ماده	n	مول (mol)	
دما	T	کلوین (K)	درجهٔ سلسیوس، درجهٔ فارنهایت

۲- کمیت‌های فیزیکی علاوه‌بر اصلی و فرعی‌بودن، به دو دستهٔ نرده‌ای (اسکالر) و برداری نیز تقسیم می‌شوند.



یه نمونهٔ باحال

در کدام گزینه، همهٔ کمیت‌ها اصلی و نرده‌ای هستند؟

۱) مسافت ـ نیرو ـ زمان ۲) تندی ـ جرم ـ جریان الکتریکی

۳) جریان الکتریکی ـ جرم ـ زمان ۴) زمان ـ دما ـ جابه‌جایی

پاسخ تشریحی:

در هر گزینه، مواردی که متناقض با خواسته سؤال هستند را بررسی می‌کنیم:

۱: نیرو: فرعی ـ برداری ۲: تندی: فرعی ـ نرده‌ای ۴: جابه‌جایی: اصلی ـ برداری

مابقی کمیت‌های ذکرشده در گزینه‌ها، همگی اصلی و نرده‌ای هستند. درنتیجه جواب گزینهٔ (۳) است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

۵۹- یکی از یکاهای متداول میدان مغناطیسی، گاوس است که معادل ۰/۱ میلی‌تسلا است. میدان مغناطیسی ناشی از یک دستگاه مغناطیسی ۴۲۰ گاوس است. اندازهٔ این میدان مغناطیسی برحسب تسلا و به‌صورت نمادگذاری علمی کدام است؟

۱) ۴۲×۱۰^{-۳} ۲) $۴/۲\times۱۰^{-۲}$ ۳) $۴/۲\times۱۰^{-۶}$ ۴) $۴/۲\times۱۰^{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۰۰۱)

با استفاده از روش زنجیره‌ای تبدیل یکا می‌توانیم بنویسیم:

$$B=۴۲۰G\times\frac{۰/۱mT}{۱G}\times\frac{۱۰^{-۳}T}{۱mT}=۴۲\times۱۰^{-۳}T=۴/۲\times۱۰^{-۲}T$$

راهنمای مسیرت

اگه توی این سؤال طبق فیزیک یازدهم می‌دونستی $۱G=۱۰^{-۴}T$ هست، خیلی سریع‌تر به جواب می‌رسیدی ولی چون ما خیلی برای برنامهٔ راهبردیمون احترام قائلیم، گاوس رو توی صورت سؤال بهت معرفی کردیم که نگی خارج از برنامهٔ آزمون بوده.

تبدیل یکاها

اغلب در حل مسئله‌های فیزیک لازم است یکای کمیتی را تغییر دهیم؛ برای این منظور دو روش زیر را به‌کار می‌بریم:

۱- روش زنجیره‌ای ۲- روش معادله‌ای

یه نمونهٔ باحال

سرعت خودرویی $۵۴\frac{km}{h}$ است. سرعت خودرو را با دو روش زنجیره‌ای و روش x برحسب $\frac{m}{s}$ به‌دست آورید.

پاسخ تشریحی:

روش زنجیره‌ای: $۵۴\frac{km}{h}=\frac{۵۴\,km}{h}\times\frac{۱۰۰۰\,m}{۱\,km}\times\frac{۱\,h}{۳۶۰۰\,s}=\frac{۵۴۰۰۰\,m}{۳۶۰۰\,s}=۱۵(\frac{m}{s})$

روش معادله‌ای: $۵۴\frac{km}{h}=x(\frac{m}{s})\Rightarrow x=\frac{۵۴\frac{km}{h}}{\frac{m}{s}}=\frac{۵۴\,km\times s}{m\times h}=\frac{۵۴۰۰۰}{۳۶۰۰}\Rightarrow x=۱۵$

یه نمونهٔ باحال

حداکثر تندی مجاز برای خودروها در یکی از جاده‌های ایران، ۶۷/۵ مایل بر ساعت می‌باشد. اگر هر مایل ۱۶۰۰ متر باشد، این تندی چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۳۰ ۴) ۲۸/۱

پاسخ تشریحی:

برای پاسخ‌دادن به این سؤال، از روش تبدیل واحد زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم. با توجه به این‌که $۱\,mile=۱۶۰۰\,m$ است، ضریبی برابر با (۱) به این صورت می‌سازیم:

$$۱=\frac{۱۶۰۰\,m}{۱\,mile}$$

و چون:

$$۱\,h=۳۶۰۰\,s\Rightarrow ۱=\frac{۱\,h}{۳۶۰۰\,s}$$

پس:

$$۶۷/۵\frac{\cancel{mile}}{\cancel{h}}\times\frac{۱۶۰۰\,m}{\cancel{۱\,mile}}\times\frac{\cancel{۱\,h}}{۳۶۰۰\,s}=۳۰\frac{m}{s}$$

پاسخ: گزینهٔ ۳

یه نمونهٔ باحال

شتاب حرکت اتومبیلی $۳\frac{N}{kg}$ می‌باشد. این شتاب چند فوت بر مربع دقیقه است؟ (هر فوت را ۳۰۰ میلی‌متر درنظر بگیرید.)

۱) ۶×۱۰^{۲} ۲) $۳/۶\times۱۰^{۴}$ ۳) ۳۶ ۴) ۶

پاسخ تشریحی:

$$۳\frac{N}{kg}\times\frac{۱kg.\frac{m}{s^{۲}}}{۱N}=۳\frac{m}{s^{۲}}\Rightarrow ۳\frac{\cancel{m}}{\cancel{s^{۲}}}\times\frac{۱۰^{۳}\,\cancel{mm}}{۱\,\cancel{m}}\times\frac{۱ft}{۳۰۰\,\cancel{mm}}\times\left(\frac{۶۰\,\cancel{s}}{۱min}\right)^{۲}=۳۶۰۰۰=۳/۶\times۱۰^{۴}\frac{ft}{min^{۲}}$$

پاسخ: گزینهٔ ۲

بیان هر کمیت به‌صورت نمادگذاری علمی به شکل زیر است:

یکای کمیت و (توان صحیحی از ۱۰) × (عدد بین ۱ تا ۱۰)

یه نمونهٔ باحال

شتاب یک خودرو معادل $۷/۲\times۱۰^{-۸}\ \frac{Tm}{min^۲}$ است. مقدار این شتاب در SI و به‌صورت نمادگذاری علمی در کدام گزینه به‌درستی بیان شده است؟

۱) $۱/۲\times۱۰^{۳}$ ۲) $۱/۲\times۱۰^{۲}$ ۳) $۲/۰\times۱۰^{۲}$ ۴) $۲/۰\times۱۰^{۱}$

پاسخ تشریحی:

باید مقدار شتاب به $\frac{m}{s^۲}$ تبدیل شود. فقط باید دقت داشته باشید که چون $۱min=۶۰s$ است؛ پس $۱min^۲=۳۶۰۰s^۲$ خواهد شد.

$$۷/۲\times۱۰^{-۸}\ \frac{Tm}{min^۲}\times\frac{۱۰^{۱۲}m}{۱Tm}\times\frac{۱min^۲}{۳۶۰۰s^۲}=\frac{۷۲\times۱۰^{-۹}\times۱۰^{۱۲}}{۳۶\times۱۰^۲}=۲/۰\times۱۰^{۱}\frac{m}{s^۲}$$

پاسخ: گزینهٔ ۴

۶۰- یک کشتی حمل کالا با تندی ثابت ۹ گره دریایی در حرکت است. این کشتی فاصلهٔ مستقیم ۳ مایل دریایی را در مدت چند دقیقه طی می‌کند؟ (هر گره دریایی معادل با $۰/۵\frac{m}{s}$ و هر مایل دریایی برابر با $۱۸۰۰m$ است.)

۱) ۲۰ ۲) ۴۰ ۳) ۴ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۱ ـ ۱۰۰۱)

کام اول

به کمک روش تبدیل یکای زنجیره‌ای، تندی حرکت کشتی را برحسب مایل بر دقیقه به‌دست می‌آوریم:

$$v=۹\text{گره}=۹\text{گره}\times\frac{۰/۵\frac{m}{s}}{۱\text{گره}}=۴/۵\frac{m}{s}$$

$$v=۴/۵\frac{m}{s}\times\frac{۱mile}{۱۸۰۰m}\times\frac{۶۰s}{۱min}=۰/۱۵\frac{mile}{min}$$

کام آخر

به کمک رابطهٔ $\Delta x=v\Delta t$ داریم:

$$\Delta t=\frac{\Delta x}{v}\xrightarrow{\Delta x=۳mile\ ,\ v=۰/۱۵\frac{mile}{min}}\Delta t=\frac{۳mile}{۰/۱۵\frac{mile}{min}}=۲۰min$$

درواقع هر گره دریایی معادل یک مایل دریایی بر ساعت است، یعنی سرعت کشتی برابر $۹\frac{mile}{h}$ است و طی مسافت $۳mile$، به $\frac{۱}{۳}$ ساعت یا همان ۲۰ دقیقه زمان نیاز دارد.

۶۱- در رابطهٔ فیزیکی $x=\alpha t^۳+\frac{\beta^۲}{x}-۲$، کمیت‌های x و t به‌ترتیب مربوط به کمیت‌های طول و زمان در SI هستند. اگر کمیت تندی در SI به‌صورت $v=\frac{\alpha^a}{\beta^b}$ تعریف شود، حاصل $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۱۱ ـ ۱۰۰۱)

کام اول

یکای SI طول، متر ($[x]=m$) و یکای SI زمان، ثانیه ($[t]=s$) است؛ بنابراین در رابطهٔ داده‌شده برای سازگاری یکاها داریم:

$$x=\alpha t^{۳}+\frac{\beta^{۲}}{x}-۲\xrightarrow{[x]=m}\begin{cases}[\alpha t^{۳}]=m\Rightarrow[\alpha].[t]^{۳}=m\Rightarrow[\alpha].s^{۳}=m\Rightarrow[\alpha]=\dfrac{m}{s^{۳}}\\ \left[\dfrac{\beta^{۲}}{x}\right]=m\Rightarrow\dfrac{[\beta]^{۲}}{[x]}=m\Rightarrow\dfrac{[\beta]^{۲}}{m}=m\Rightarrow[\beta]^{۲}=m^{۲}\Rightarrow[\beta]=m\end{cases}$$

کام آخر

می‌دانیم یکای SI کمیت تندی، $\frac{m}{s}$ است و داریم:

$$v=\frac{\alpha^{a}}{\beta^{b}}\Rightarrow[v]=\frac{[\alpha]^{a}}{[\beta]^{b}}\Rightarrow\frac{m}{s}=\frac{(\frac{m}{s^{۳}})^{a}}{(m)^{b}}\Rightarrow\frac{m}{s}=\frac{m^{a-b}}{s^{۳a}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۳a=۱\Rightarrow a=\dfrac{۱}{۳}\\ a-b=۱\Rightarrow b=a-۱\Rightarrow b=\dfrac{۱}{۳}-۱=-\dfrac{۲}{۳}\end{cases}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{\frac{-۲}{۳}}{\frac{۱}{۳}}=-۲$$

راهنمای مسیرت

اگه درصدت زیر ۸۰ است، سر جلسهٔ آزمون سمت این سؤال نرو.

سازگاری یکاها

در تمامی روابط فیزیک، یکاهای دو طرف تساوی باید باهم برابر باشند؛ برای مثال:

با توجه به رابطهٔ $F=ma$، می‌توان نتیجه گرفت:

$$N=kg.\frac{m}{s^{۲}}$$

همچنین اگر رابطه‌ای به‌صورت $A=B+C+D$ باشد، باید یکای کمیت‌های A، B، C و D یکسان باشد.

در روابط فیزیکی اجازهٔ استفاده از عمل جمع و تفریق را نداریم، مگر این‌که یکای دو کمیتی که باهم جمع یا تفریق می‌شوند، یکسان باشند.

یه نمونهٔ باحال

رابطهٔ فیزیکی $A=BC+\frac{D}{E}$ برقرار است. اگر یکای کمیت‌های A، B و D به‌ترتیب ژول (J)، نیوتون (N) و متر بر ثانیه $(\frac{m}{s})$ باشد، به‌ترتیب از راست به چپ یکای کمیت‌های C و E برحسب یکاهای اصلی در SI در کدام گزینه به‌درستی آمده‌اند؟

۱) m، $\frac{kg.m}{s}$ ۲) s، $\frac{kg.s}{m}$ ۳) m، $\frac{s}{kg.m}$ ۴) s، $\frac{m}{kg.s}$

پاسخ تشریحی:

وقتی دو یا چند کمیت باهم جمع می‌شوند، می‌بایست دارای یکاهای یکسانی باشند؛ بنابراین یکای $B\times C$ و یکای $\frac{D}{E}$ نیز باید برحسب ژول باشد:

$$K=\frac{۱}{۲}mv^۲\Rightarrow ۱J=۱\frac{kg.m^۲}{s^۲}\ ,\ F=ma\Rightarrow ۱N=۱\frac{kg.m}{s^۲}$$

$$[B\times C]=J\Rightarrow \overbrace{[B]}^{N}\times[C]=\frac{kg.m^۲}{s^۲}\Rightarrow \frac{kg.m}{s^۲}\times[C]=\frac{kg.m^۲}{s^۲}\Rightarrow[C]=m$$

یعنی کمیت C از جنس طول است.

$$\left[\frac{D}{E}\right]=J\Rightarrow\frac{[D]}{[E]}=\frac{kg.m^۲}{s^۲}\Rightarrow\frac{\frac{m}{s}}{[E]}=\frac{kg.m^۲}{s^۲}\Rightarrow[E]=\frac{m}{s}\times\frac{s^۲}{kg.m^۲}=\frac{s}{kg.m}$$

پاسخ: گزینهٔ ۳

ماز

۶۲- یکای Pa معادل کدام‌یک از یکاهای زیر است؟ (Pa: یکای فشار، J: یکای انرژی، N: یکای نیرو، W: یکای توان و m: یکای طول است.)

۱) $\frac{J}{m^۲}$ ۲) $\frac{N}{m^۲}$ ۳) $\frac{W}{m^۲}$ ۴) $N.m^۲$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۷ ـ ۱۰۰۱)

هریک از یکاها را برحسب یکاهای اصلی می‌نویسیم:

$$Pa=\frac{kg}{m.s^۲}\ ,\ J=\frac{kg.m^۲}{s^۲}\ ,\ N=\frac{kg.m}{s^۲}\ ,\ W=\frac{kg.m^۲}{s^۳}$$

بنابراین $Pa=\frac{kg}{m.s^۲}=\frac{kg.m}{m^۲.s^۲}=\frac{N}{m^۲}$ است؛ درنتیجه گزینهٔ (۲) معادل Pa است.

نحوهٔ به‌دست آوردن یکای یک کمیت

۱- ابتدا یک فرمول بنویسید که کمیت موردنظر داخل آن باشد.

۲- حال، کمیت موردنظر را یک طرف و بقیه را طرف دیگر تساوی ببرید (استانداردسازی).

۳- درنهایت به‌جای سایر کمیت‌ها یکا قرار دهید تا یکای مجهول محاسبه شود.

یه نمونهٔ باحال

یکای فرعی نیرو را در SI به‌دست آورید.

پاسخ: طبق قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$F=ma$$

$$\Rightarrow[F]\equiv[m][a]\Rightarrow N=kg\times\frac{m}{s^۲}\Rightarrow N=\frac{kg.m}{s^۲}$$

در جدول زیر، یکای تعدادی از کمیت‌های مهم آورده شده است. توصیه می‌کنیم این یکاها را حفظ کنید و با روابط فیزیکی آن‌ها را به‌دست آورید.

کمیت	یکای SI	یکای فرعی (یکا برحسب یکاهای اصلی)	یکای فرعی
تندی و سرعت	$\frac{m}{s}$	$\frac{m}{s}$	
شتاب	$\frac{m}{s^2}$	$\frac{m}{s^2}$	$\frac{N}{kg}$
نیرو	N	$\frac{kg.m}{s^2}$	
انرژی (کار و گرما)	J	$\frac{kg.m^2}{s^2}$	N.m
توان	W	$\frac{kg.m^2}{s^3}$	$\frac{J}{s}$
فشار	Pa	$\frac{kg}{m.s^2}$	$\frac{N}{m^2}$

آزمون سراسری خارج از کشور ۱۴۰۰

یکای فرعی فشار برحسب یکاهای اصلی SI کدام است؟

۱) Pa ۲) $\frac{kg}{m.s^2}$ ۳) $\frac{kg.m}{s^2}$ ۴) $\frac{N}{m.s}$

پاسخ تشریحی:

با توجه به متن درس‌نامه و جدولی که در آن مطرح شده، یکای فشار برحسب یکاهای اصلی $\frac{kg}{m.s^2}$ است. رابطهٔ فشار $P=\frac{F}{A}$ می‌باشد که در این رابطه، نیرو برحسب N (نیوتون) و مساحت برحسب m^2 وارد می‌شود. یکای فشار Pa (پاسکال) است که معادل $\frac{N}{m^2}$ می‌باشد؛ اما یکای نیرو برحسب یکاهای اصلی $kg\frac{m}{s^2}$ است؛ پس یکای فشار نیز برابر است با:

$$Pa=\frac{N}{m^2}=\frac{kg\frac{m}{s^2}}{m^2}=\frac{kg}{m.s^2}$$

پاسخ: گزینهٔ ۲

یه نمونهٔ باحال

اگر P نماد کمیت فشار و F نماد کمیت نیرو باشد، یکای عبارت $\frac{P^2}{F}$ برحسب یکاهای اصلی SI در کدام گزینه آمده است؟

۱) $\frac{Pa^2}{N}$ ۲) $\frac{kg.m}{s^2.N}$ ۳) $\frac{kg}{m^3.s^2}$ ۴) $\frac{kg^2}{m.s^2}$

پاسخ تشریحی:

یکای فشار در SI، Pa (پاسکال) است که برحسب یکاهای اصلی به‌صورت $\frac{kg}{m.s^2}$ نوشته می‌شود و یکای نیرو در SI، N (نیوتون) است که برحسب یکاهای اصلی $kg.\frac{m}{s^2}$ نوشته می‌شود. پس یکای $\frac{P^2}{F}$ برابر است با:

$$\left[\frac{P^2}{F}\right]=\frac{(\frac{kg}{m.s^2})^2}{\frac{kg.m}{s^2}}=\frac{kg}{m^3.s^2}$$

پاسخ: گزینهٔ ۳

یه نمونهٔ باحال

کدام‌یک از گزینه‌های زیر برابر یک ژول است؟ (دکا (da) و هکتو (h) به‌ترتیب پیشوندهایی معادل 10^1 و 10^2 هستند.)

۱) $10^3 Pa.m^3$ ۲) $1\frac{N}{hm}$ ۳) $10^{-3}\frac{kg.L}{m.s^2}$ ۴) $3/6\times10^4\frac{g.dam^2}{(min)^2}$

پاسخ تشریحی:

تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم تا جواب صحیح به‌دست آید:

$$10^3 Pa.m^3=10^3\frac{N}{m^2}.m^3=10^3 N.m=10^3 J \quad (\times)$$

$$1\frac{N}{hm}=1\frac{N}{10^2 m}=10^{-2}\frac{N}{m} \quad (\times)$$

$$10^{-3}\frac{kg.L}{m.s^2}=10^{-3}\frac{kg\times10^{-3}m^3}{m.s^2}=10^{-6}\frac{kg.m^2}{s^2}=10^{-6} J \quad (\times)$$

$$3/6\times10^4\frac{g.dam^2}{(min)^2}=3/6\times10^4\times\frac{10^{-3}kg\times10^2 m^2}{(60s)^2}$$

$$=\frac{3/6\times10^3 kg.m^2}{3600 s^2}=1\frac{kg.m^2}{s^2}=1J \quad (\checkmark)$$

پاسخ: گزینهٔ ۴

۶۳- ستاره‌های کوتولهٔ سفید بسیار چگال هستند و چگالی آن‌ها در SI حدود ۱۰۰ میلیون است. اگر یک مکعب به ضلع ۲cm از مادهٔ تشکیل‌دهندهٔ این ستاره‌ها در اختیار داشته باشیم، جرم آن چند مگاگرم می‌شود؟

۱) ۸۰۰ ۲) ۸۰ ۳) ۸ ۴) ۰/۸

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۲ ـ ۱۰۰۱)

کام اول

ابتدا حجم مکعب را به‌دست می‌آوریم:

$$V=(\text{طول ضلع مکعب})^3=(2\times10^{-2})^3=8\times10^{-6}m^3$$

به کمک رابطهٔ $\rho = \frac{m}{V}$ داریم:

$$m = \rho V \xrightarrow{\rho = ۱۰^{۸}\ \frac{kg}{m^{۳}},\ V = ۸\times ۱۰^{-۶}\ m^{۳}} m = ۱۰^{۸}\times ۸\times ۱۰^{-۶} = ۸\times ۱۰^{۲}\ kg$$

$$\xrightarrow{\text{مقدار جرم برحسب Mg}} m = ۸\times ۱۰^{۲}\ \cancel{kg}\times \frac{۱۰^{۳}\ \cancel{g}}{۱\ \cancel{kg}}\times \frac{۱\ Mg}{۱۰^{۶}\ \cancel{g}} = ۰/۸\ Mg$$

چگالی

۱- چگالی یک جسم برابر جرم واحد حجم آن است و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

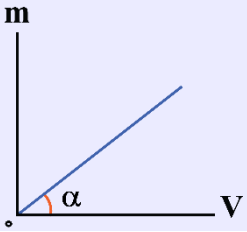
$$\rho = \frac{m \rightarrow \text{جرم جسم برحسب کیلوگرم } (kg)}{V \rightarrow \text{حجم جسم برحسب متر مکعب } (m^{۳})} \rightarrow \text{چگالی جسم برحسب کیلوگرم بر متر مکعب } (\frac{kg}{m^{۳}})$$

۲- یکای اصلی چگالی برابر $\frac{\text{کیلوگرم}}{\text{مترمکعب}}$ $(\frac{kg}{m^{۳}})$ است ولی یکای $\frac{\text{گرم}}{\text{سانتی‌مترمکعب}}$ $(\frac{g}{cm^{۳}})$ هم برای آن استفاده می‌شود.

هر $\frac{\text{گرم}}{\text{سانتی‌مترمکعب}}$ $(\frac{g}{cm^{۳}})$ معادل ۱۰۰۰ $\frac{\text{کیلوگرم}}{\text{مترمکعب}}$ $(\frac{kg}{m^{۳}})$ است.

$$۱\frac{g}{cm^{۳}} \equiv ۱۰۰۰\frac{kg}{m^{۳}}$$

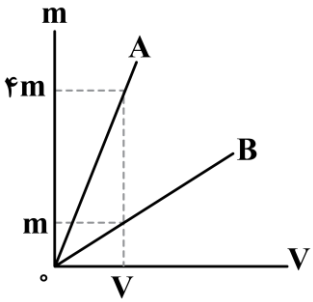
۳- نمودار تغییرات جرم یک ماده برحسب حجم آن به‌صورت یک خط است که شیب آن برابر چگالی جسم است.



$$\text{شیب خط} = \tan\alpha = \frac{m}{V} = \rho$$

اگر نمودار حجم برحسب جرم داده شد، شیب آن برابر معکوس چگالی جسم است.

۶۴- نمودار جرم برحسب حجم برای دو مادهٔ A و B مطابق شکل است. اگر حجم‌های مساوی از این دو ماده را با یکدیگر مخلوط کنیم، چگالی مخلوط به‌دست‌آمده، چند برابر چگالی مادهٔ A است؟ (از تغییر حجم براثر اختلاط صرف نظر شود.)



۱) $\frac{۳}{۸}$

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱۰}{۸}$

۴) $\frac{۵}{۸}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۸ ـ ۱۰۰۱)

با نوشتن یک تناسب ساده و با کمک نمودار داده‌شده، چگالی مادهٔ B را برحسب چگالی مادهٔ A به‌دست می‌آوریم:

$$\rho = \frac{m}{V} \xrightarrow{V_A = V_B} \frac{\rho_B}{\rho_A} = \frac{m_B}{m_A} = \frac{m}{۴m} = \frac{۱}{۴}$$

$$\rho_B = \frac{۱}{۴}\rho_A$$

اگر حجم‌های مساوی از این دو ماده را با یکدیگر مخلوط کنیم، چگالی مخلوط برابر است با:

$$\rho=\frac{\rho_A V_A+\rho_B V_B}{V_A+V_B}=\frac{\rho_A\times V+\frac{۱}{۴}\rho_A\times V}{۲V}=\frac{۵}{۸}\rho_A$$

جرقهٔ ذهنی

با توجه به نمودار برای حجم یکسان V از ماده‌های A و B، جرم مخلوط برابر $m_{مخلوط}=۴m+m=۵m$ و حجم مخلوط برابر $۲V$ می‌شود و طبق رابطهٔ مقایسه‌ای چگالی می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{\rho_{مخلوط}}{\rho_A}=\frac{m_{مخلوط}}{m_A}\times\frac{V_A}{V_{مخلوط}}=\frac{۵m}{۴m}\times\frac{V}{۲V}=\frac{۵}{۸}$$

خلاصهٔ روابط چگالی در یک جدول

روابط کلی چگالی	چگالی	$\rho=\frac{m}{V}$
	چگالی مخلوط (آلیاژ)	$\rho=\frac{m_۱+m_۲+\dots}{V_۱+V_۲+\dots}$
		$\rho=\frac{\rho_۱V_۱+\rho_۲V_۲+\dots}{V_۱+V_۲+\dots}$
		$\rho=\frac{m_۱+m_۲+\dots}{\frac{m_۱}{\rho_۱}+\frac{m_۲}{\rho_۲}+\dots}$

سؤالات چگالی مخلوط:

در این سؤالات دو ماده باهم ترکیب می‌شوند و با فرض آن‌که حجم مخلوط حاصل برابر مجموع حجم دو ماده است، چگالی مخلوط از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\rho_{مخلوط}=\frac{m_{کل}}{V_{کل}}=\frac{m_۱+m_۲}{V_۱+V_۲}$$

اگر در سؤالی، چگالی و حجم مواد را بدانیم، کافی است از رابطهٔ $m=\rho V$ در رابطهٔ بالا استفاده کنیم.

$$\rho_{مخلوط}=\frac{m_۱+m_۲}{V_۱+V_۲}\xrightarrow[m_۲=\rho_۲V_۲]{m_۱=\rho_۱V_۱}\rho_{مخلوط}=\frac{\rho_۱V_۱+\rho_۲V_۲}{V_۱+V_۲}$$

اگر در سؤالی چگالی و جرم مواد را بدانیم، کافی است از رابطهٔ $V=\frac{m}{\rho}$ در رابطهٔ بالا استفاده کنیم.

$$\rho_{مخلوط}=\frac{m_۱+m_۲}{V_۱+V_۲}\xrightarrow[V_۲=\frac{m_۲}{\rho_۲}]{V_۱=\frac{m_۱}{\rho_۱}}\rho_{مخلوط}=\frac{m_۱+m_۲}{\frac{m_۱}{\rho_۱}+\frac{m_۲}{\rho_۲}}$$

یه نمونهٔ باحال

۲ لیتر آب با چگالی $۱\frac{g}{cm^۳}$ را با ۳ لیتر الکل با چگالی $۰/۸\frac{g}{cm^۳}$ مخلوط می‌کنیم. چگالی مخلوط به‌دست‌آمده چند گرم بر سانتی‌متر مکعب است؟ (از تغییر حجم دراثر تداخل حجمی صرف‌نظر شود.)

پاسخ تشریحی:

با استفاده از فرمول چگالی مخلوط داریم:

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2} = \frac{1 \times 2 + 0/8 \times 3}{2+3} = \frac{4/4}{5} = 0/88 \frac{g}{cm^3}$$

یه نمونهٔ باحال

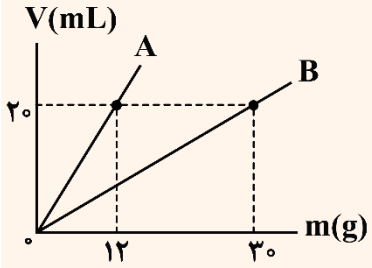
نمودار تغییرات حجم برحسب جرم دو مایع A و B مطابق شکل است. چند میلی‌لیتر از مایع A را با ۴۵۰ گرم از مایع B مخلوط کنیم تا چگالی مایع به‌دست‌آمده، ۱۰ درصد بیش‌تر از چگالی مایع A باشد؟ (دراثر اختلال دو مایع، تغییر حجمی صورت نمی‌گیرد.)

۱) ۱۴۰۰

۲) ۲۴۰۰

۳) ۳۶۰۰

۴) ۴۲۰۰



پاسخ تشریحی:

گام اول: با توجه به نمودار، چگالی مایع‌های A و B را محاسبه می‌کنیم $(1mL = 1cm^3)$:

$$\rho_A = \frac{m_A}{V_A} = \frac{12}{20} = 0/6 \frac{g}{cm^3}$$

$$\rho_B = \frac{m_B}{V_B} = \frac{30}{20} = 1/5 \frac{g}{cm^3}$$

گام دوم: می‌خواهیم چگالی مخلوط، ۱۰ درصد بیش‌تر از چگالی مایع A شود، یعنی:

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{110}{100}\rho_A = \frac{11}{10} \times 0/6 = 0/66 \frac{g}{cm^3}$$

گام آخر: با استفاده از رابطهٔ چگالی مخلوط داریم:

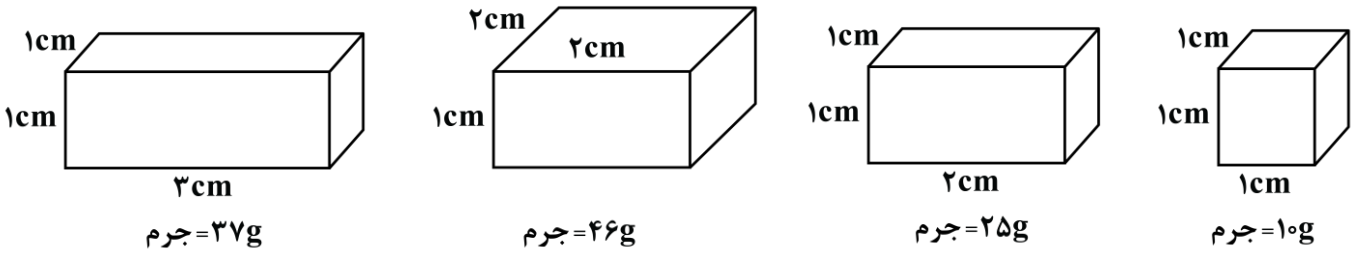
$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{\overbrace{\rho_A V_A}^{m_A} + m_B}{V_A + \underbrace{V_B}_{\frac{m_B}{\rho_B}}} \Rightarrow 0/66 = \frac{0/6V_A + 450}{V_A + \frac{450}{1/5}}$$

$$\Rightarrow 0/66 = \frac{0/6V_A + 450}{V_A + 300} \Rightarrow 0/66V_A + 198 = 0/6V_A + 450$$

$$\Rightarrow 0/06V_A = 252 \Rightarrow V_A = 4200cm^3 = 4200mL$$

پاسخ: گزینهٔ ۴

۶۵- قطعه‌های زیر، آلیاژهایی توپر از طلا و مس هستند. قطعه‌ای که درصد طلای بیش‌تری دارد را انتخاب می‌کنیم. چند درصد جرم این قطعه را مس تشکیل داده است؟ (چگالی طلا و مس به ترتیب $۲۰\frac{g}{cm^۳}$ و $۸\frac{g}{cm^۳}$ است.)



۱) ۲۵ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۶۲/۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ استدلالی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۱۸ ـ ۱۰۰۱)

چون چگالی مس از چگالی طلا کم‌تر است، هرچه درصد طلا در یک آلیاژ بیش‌تر باشد، چگالی آن آلیاژ بیش‌تر است؛ بنابراین کافی است چگالی هر شکل را به‌دست آورده و مقایسه کنیم:

$$\rho_۱=\frac{m_۱}{V_۱}=\frac{۱۰}{۱}=۱۰\frac{g}{cm^۳}$$

$$\rho_۲=\frac{m_۲}{V_۲}=\frac{۲۵}{۲}=۱۲/۵\frac{g}{cm^۳}$$

$$\rho_۳=\frac{m_۳}{V_۳}=\frac{۴۶}{۴}=۱۱/۵\frac{g}{cm^۳}$$

$$\rho_۴=\frac{m_۴}{V_۴}=\frac{۳۷}{۳}\simeq ۱۲/۳۳\frac{g}{cm^۳}$$

بنابراین قطعهٔ (۲) بیش‌ترین درصد طلا را دارد و برای محاسبهٔ درصد جرم مس در آن به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\rho_{مخلوط}=\frac{m_{طلا}+m_{مس}}{V_{طلا}+V_{مس}}=\frac{m_{طلا}+m_{مس}}{\frac{m_{طلا}}{\rho_{طلا}}+\frac{m_{مس}}{\rho_{مس}}}$$

$$\Rightarrow ۱۲/۵=\frac{m_{طلا}+m_{مس}}{\frac{m_{طلا}}{۲۰}+\frac{m_{مس}}{۸}}$$

اگر x درصد جرم را مس و $۱۰۰-x$ درصد آن را طلا تشکیل داده باشد، داریم:

$$m_{مس}=\frac{x}{۱۰۰}m_{کل}\ ,\ m_{طلا}=\frac{۱۰۰-x}{۱۰۰}m_{کل}$$

$$\Rightarrow ۱۲/۵=\frac{m_{کل}}{\frac{۱۰۰-x}{۱۰۰}m_{کل}}{۲۰}+\frac{\frac{x}{۱۰۰}m_{کل}}{۸}\Rightarrow ۱۲/۵=\frac{۱}{\frac{۱۰۰-x}{۲۰۰۰}+\frac{x}{۸۰۰}}$$

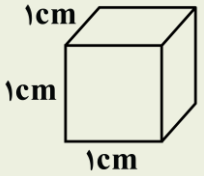
$$\Rightarrow \frac{۱۰۰-x}{۱۶۰}+\frac{x}{۶۴}=۱\xrightarrow{\text{ضرب دو طرف در ۶۴۰}}۴۰۰-۴x+۱۰x=۶۴۰\Rightarrow ۶x=۲۴۰\Rightarrow x=۴۰$$

بنابراین ٪۴۰ جرم این آلیاژ را مس تشکیل داده است.

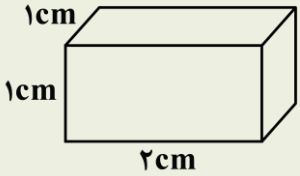
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

آزمون سراسری ریاضی ۱۴۰۵

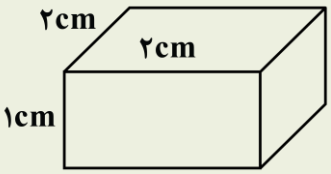
۶۸- قطعه‌های زیر، آلیاژهایی از طلا و مس هستند. کدام قطعه درصد مس بیش‌تری دارد؟ (چگالی طلا $۱۹\frac{g}{cm^۳}$ است.)

۱) 

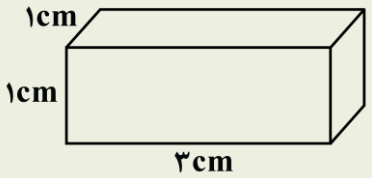
جرم = ۱۴gr

۲) 

جرم = ۳۳gr

۳) 

جرم = ۴۶gr

۴) 

جرم = ۳۷gr

پاسخ تشریحی:

چون چگالی مس از چگالی طلا کم‌تر است، هرچه درصد مس در یک آلیاژ بیش‌تر باشد، چگالی آن آلیاژ کم‌تر است؛ بنابراین کافی است چگالی هر شکل را به‌دست آورده و مقایسه کنیم:

$$\rho_۱ = \frac{m_۱}{V_۱} = \frac{۱۴}{۱} = ۱۴\frac{g}{cm^۳}$$

$$\rho_۲ = \frac{m_۲}{V_۲} = \frac{۳۳}{۲} = ۱۶/۵\frac{g}{cm^۳}$$

$$\rho_۳ = \frac{m_۳}{V_۳} = \frac{۴۶}{۴} = ۱۱/۵\frac{g}{cm^۳}$$

$$\rho_۴ = \frac{m_۴}{V_۴} = \frac{۳۷}{۳} \simeq ۱۲/۳۳\frac{g}{cm^۳}$$

چگالی قطعهٔ (۳) از سایر قطعه‌ها کم‌تر است؛ بنابراین درصد مس آن بیش‌تر است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

بودجه‌بندی این آزمون

شیمی دوازدهم: مولکول‌ها در خدمت تندرستی: از ابتدای فصل تا سر با هم بیندیشیم | صفحه‌های ۱ تا ۱۴
شیمی پایه: کیهان، زادگاه الفبای هستی: از ابتدای فصل تا سر ساختار اتم | صفحه‌های ۱ تا ۲۳

سهم در کنکور

این آزمون در مجموع ۳ تست از ۳۰ تستِ کنکور را پوشش داده است.

مازی‌های عزیز سلام!

امروز، اولین مرحله از آزمون‌های اصلی ماز برگزار شد و امیدوارم که مطابق با تلاش چند هفته اخیرتون، بهترین نتیجه ممکن رو گرفته باشید. در مقدمه اولین آزمون، من میخوام به چند سوال پرتکرار شما، به طور دقیق جواب بدم!

سوال اول! شیمی دوازدهم چند فصله و هر فصل، مربوط به چیه؟

کتاب درسی شیمی دوازدهم، به طور کلی از ۴ فصل تشکیل شده. فصل اول، در ابتدا در رابطه با مواد شوینده صحبت می‌کنه و بعد از اون، میره سراغ اسیدها و بازها. فصل دوم، رابطه بین علم شیمی و علم الکتریسیته رو بررسی می‌کنه و در رابطه با فرایند تولید برق به کمک واکنش‌های شیمیایی حرف میزنه. فصل سوم، در رابطه با ساختار میکروسکوپی مواد جامد بحث می‌کنه و فصل چهارم، عملاً از ۳ قسمت مجزا تشکیل شده. در قسمت اول، کتاب درسی در رابطه با انرژی فعال‌سازی در واکنش‌ها حرف میزنه، در قسمت دوم میره سراغ تعادل‌های شیمیایی و در قسمت سوم، در رابطه با شیمی آلی مطالبی رو برای ما مطرح می‌کنه.

سوال دوم! کدوم فصل شیمی دوازدهم مهم‌تره؟

به طور کلی، فصل اول کتاب شیمی دوازدهم در کنکور و امتحان نهایی سهم بیشتری نسبت به بقیه فصل‌ها داره و برای خوندنش، باید وقت بیشتری بذارین. توی جدول زیر، اهیمت فصل‌های مختلف رو براتون آوردیم.

	فصل	تعداد سؤال در کنکور	بارم در امتحان نهایی	در این فصل، چی مهم‌تره؟
۱	دوازدهم	۳ تا ۵	۶/۵	مسائل ـ مفاهیم
۲	دوازدهم	۳ تا ۴	۵	مفاهیم
۳	دوازدهم	۲ تا ۳	۴	حفظیات
۴	دوازدهم	۳ تا ۴	۴/۵	مسائل ـ مفاهیم

سوال سوم! هر فصل از شیمی دوازدهم چه پیش‌نیازهایی داره؟

درس شیمی، به طور کلی درس بسیار به‌هم‌پیوسته‌ای به حساب میاد و اگر قصد دارین همه مطالبش رو خیلی خوب و مفهومی یاد بگیرید، باید سعی کنید قبل از مطالعه هر فصل، اول مطالب پیش‌نیاز اون رو یاد بگیرید. توی جدول زیر، پیش‌نیازهای مهم فصل‌های مختلف رو براتون آوردیم.

	فصل	پیش‌نیازهای مهم
۱	دوازدهم	هیدروکربن‌ها ـ گروه عاملی الکلی، اسیدی و استری ـ مسائل استوکیومتری ـ مسائل غلظت محلول‌ها
۲	دوازدهم	رسم آرایش الکترونی ـ رسم ساختار لوویس ـ هیدروکربن‌ها
۳	دوازدهم	رسم آرایش الکترونی ـ رسم ساختار لوویس
۴	دوازدهم	مسائل استوکیومتری ـ مسائل غلظت محلول‌ها ـ گروه عاملی الکلی، اسیدی و استری

سوال چهارم! مطالب شیمی دوازدهم، سخت به حساب میان؟

اگر مطالب پیش‌نیاز شیمی دوازدهم رو به موقع بخونی و سعی کنی همه چیز رو خیلی دقیق و مفهومی مطالعه کنی، قطعاً شیمی دوازدهم برات خیلی راحت خواهد بود و به سادگی، همه چیز رو یاد میگیری. هرچند که حجم مطالب فصل ۱ شیمی دوازدهم در مقایسه با سایر فصل‌های اون بیشتره، اما همین فصل رو هم اگر با رعایت مطالب پیش‌نیاز بخونی، قطعا توش درصد و نمره‌های خوبی خواهی گرفت. بچه‌ها، توجه کنید که حجم زیادی از مطالب فصل ۲، ۳ و ۴ شیمی دوازدهم مفهومی هستن و این فصل‌ها برای بچه‌ها خیلی خوش‌دست به حساب میان.

توی متن بالا، سعی کردم به همه سوالات مهم شما در رابطه با شیمی دوازدهم جواب بدم تا بتونین با دید روشن‌تری این درس رو بخونین. به نظر من، اون چیزی که نتیجه نهایی شما رو توی این مسیر تعیین می‌کنه، فقط و فقط تلاش شماست. من مطمئنم که جمعیت زیادی از افرادی که دارن این متن رو میخونن، به خودشون قول دادن که در طول چند ماه آینده، همه تلاششون رو بکنن تا در نهایت، حق خودشون رو از کنکور بگیرن. شک ندارم که خیلی خوب جلو میرین و با خبر موفقیتتون، ما رو خیلی خوشحال می‌کنید.

دکتر فرشاد هادیان‌فرد ـ رتبهٔ ۲۸ کنکور ۹۴ و مسئول درس شیمی آزمون‌های تستی پایهٔ دوازدهم ماز

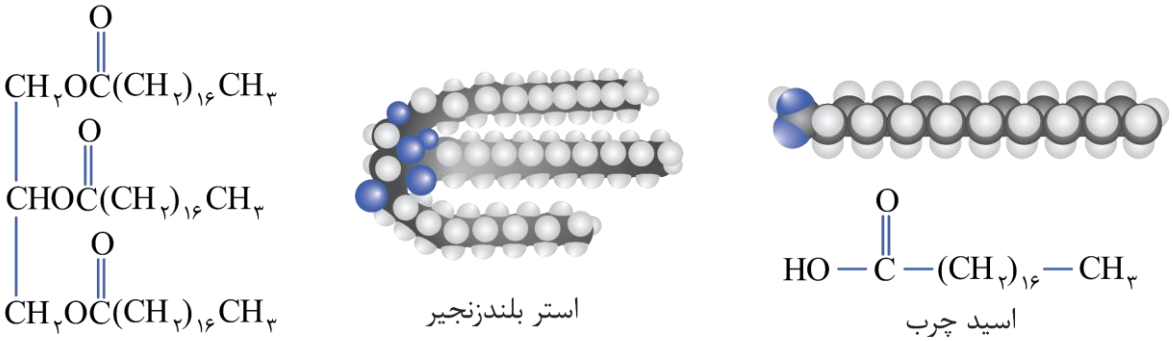
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۶- شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی موجود در ساختار یک استر سنگین سه عاملی، چند برابر شمار این جفت الکترون‌ها در ساختار هر مولکول اوره است؟

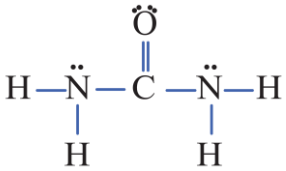
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی و خط‌به‌خط ـ سریع ـ صفحهٔ ۵ ـ ۱۴۰۱)

چربی‌ها، مخلوطی از **اسیدهای چرب** (کربوکسیلیک اسیدهایی با زنجیر بلند کربنی و جرم مولکولی زیاد) و **استرهای بلندزنجیر** (استرهایی سه عاملی با جرم مولی زیاد) هستند. تصویر زیر، ساختار مولکولی انواع چربی‌ها را نشان می‌دهد:



در ساختار یک استر سنگین سه عاملی، مجموعاً **۶ اتم اکسیژن** و هر اتم اکسیژن نیز دارای **۲ جفت الکترون ناپیوندی** است. بر این اساس، می‌توان گفت در ساختار هر مولکول از ترکیب مورد نظر، مجموعاً **۱۲ جفت الکترون ناپیوندی** وجود دارد. ساختار اوره با فرمول شیمیایی $CO(NH_2)_2$، به‌صورت زیر است:



در ساختار هر مولکول اوره، مجموعاً **۴ جفت الکترون ناپیوندی** وجود دارد. اوره از جمله مواد قطبی بوده و در آب حل می‌شود.

قطبی یا ناقطبی

جدول زیر، اطلاعات مربوط به چند ترکیب مختلف را نشان می‌دهد:

نام ماده	فرمول شیمیایی	نوع ساختار ماده	محلول در آب	محلول در هگزان
اتیلن گلیکول	CH_2OHCH_2OH	مولکول قطبی (دارای پیوند هیدروژنی)	✓	✗
نمک خوراکی	$NaCl$	یونی	✓	✗
بنزین	C_8H_{18}	مولکول ناقطبی	✗	✓
اوره	$CO(NH_2)_2$	مولکول قطبی (دارای پیوند هیدروژنی)	✓	✗
روغن زیتون	$C_{57}H_{104}O_6$	مولکول ناقطبی	✗	✓
وازلین	$C_{25}H_{52}$	مولکول ناقطبی	✗	✓

۶۷- یک نمونه اتیلن‌گلیکول، در ساختار خود دارای ۱۲/۸ گرم اتم اکسیژن است. با استفاده از نصف مقدار اتیلن‌گلیکول موجود در این نمونه، چند لیتر محلول ضدیخ می‌توان تهیه کرد که غلظت مولی اتیلن‌گلیکول در آن برابر با ۰/۰۴ مول بر لیتر باشد؟

$(O = ۱۶\ g.mol^{-۱})$

۱) ۱ ۲) ۰/۵ ۳) ۱۰ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴ ـ ۱۲۰۱)

برای حل این سؤال، باید مراحل زیر را طی کنیم:

۱) محاسبه مول اتیلن‌گلیکول با استفاده از داده‌های سؤال

۲) به‌دست آوردن حجم محلول با استفاده از مقدار اتیلن‌گلیکول

اتیلن‌گلیکول ($C_۲H_۶O_۲$) یک الکل دو عاملی با فرمول ساختاری زیر است:

$$HO-CH_۲-CH_۲-OH$$

در ساختار هر مولکول اتیلن‌گلیکول، ۲ اتم اکسیژن وجود دارد. بر این اساس، مقدار مول نمونه اتیلن‌گلیکول که در ساختار مولکولی خود دارای ۱۲/۸ گرم اتم اکسیژن باشد را محاسبه می‌کنیم:

$$?\ mol\ C_۲H_۶O_۲ = ۱۲/۸\ g\ O \times \frac{۱\ mol\ O}{۱۶\ g\ O} \times \frac{۱\ mol\ C_۲H_۶O_۲}{۲\ mol\ O} = ۰/۴\ mol$$

نیمی از این نمونه اتیلن‌گلیکول، معادل با ۰/۲ مول از آن، در تهیه ضدیخ استفاده شده است. در هر لیتر از محلولی با غلظت مولی ۰/۰۴ مول بر لیتر از اتیلن‌گلیکول، مقدار ۰/۰۴ مول از این ماده حل شده است. بر این اساس، حجم محلول تولید شده را محاسبه می‌کنیم:

$$?\ L\ \text{محلول} = ۰/۲\ mol\ C_۲H_۶O_۲ \times \frac{۱\ L\ \text{محلول}}{۰/۰۴\ mol\ C_۲H_۶O_۲} = ۵\ L$$

غلظت

برای بیان مقدار حل‌شونده موجود در یک محلول، از انواع غلظت‌ها استفاده می‌شود. غلظت یک محلول، به ما نشان می‌دهد که در مقدار مشخص از آن محلول، چه مقدار از حل‌شونده وجود دارد. داریم:

$$\text{غلظت} = \frac{\text{مقدار حل‌شونده}}{\text{مقدار محلول}}$$



درصد جرمی، مولاریته و ppm، از جمله روش‌های محاسبه غلظت محلول‌ها به شمار می‌روند. در آزمایشگاه، اندازه‌گیری حجم یک مایع آسان‌تر از جرم آن است. شیمی‌دان‌ها نیز اغلب، مقدار هر ماده را برحسب مول بیان کرده و مبنای محاسبه‌های استوکیومتری، مول است. به همین خاطر، شیمی‌دان‌ها برای بیان غلظت محلول‌ها از مقیاسی استفاده می‌کنند که در آن تعداد مول حل‌شونده موجود در هر لیتر محلول نشان داده می‌شود. چنین غلظتی، غلظت مولار (غلظت مولی یا همان مول بر لیتر) نام دارد. غلظت مولی (M) یک محلول، با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{غلظت مولی} = \frac{\text{مول حل‌شونده}}{\text{لیتر محلول}}$$



برای محاسبه مقدار حل‌شونده موجود در یک محلول، می‌توان از کسر تبدیل زیر استفاده کرد:

$$\text{مول حل‌شونده} \underset{\div M}{\overset{\times M}{\rightleftarrows}} \text{حجم محلول}$$

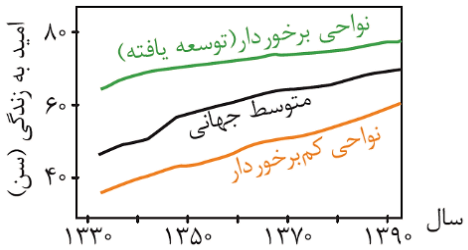


۶۸- در رابطه با شاخص امید به زندگی، کدام مطلب زیر درست است؟

۱) این شاخص، تفاوت میان حداقل و حداکثر طول عمر افراد ساکن در یک محیط را مشخص می‌کند.
۲) مقدار این شاخص در نواحی برخوردار جهان، برخلاف مناطق کم‌برخوردار، در حال افزایش است.
۳) با افزایش میزان استفاده از مواد شوینده در سطح جهان، مقدار این شاخص نیز افزایش می‌یابد.
۴) مقدار این شاخص، با یکای (سال) گزارش شده و در شهرهای یک کشور، با هم برابر است.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ خط‌به‌خط و مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۳ ـ ۱۴۰۱)

شاخص امید به زندگی نشان می‌دهد با توجه به خطراتی که انسان‌ها در طول زندگی با آن مواجه هستند، به‌طور میانگین چند سال در این جهان زندگی می‌کنند. مقدار این شاخص در سطح جهان، با یکای (سال) گزارش می‌شود. امید به زندگی شاخصی است که در کشورهای گوناگون و حتی در شهرهای یک کشور نیز با هم تفاوت دارد، زیرا این شاخص به عوامل گوناگونی بستگی دارد. در طول سال‌های اخیر، میزان امید به زندگی هم برای مناطق برخوردار جهان و هم برای مناطق کم‌برخوردار جهان افزایش پیدا کرده است. هر چند که میزان این افزایش برای مناطق کم‌برخوردار، بیشتر از مناطق برخوردار بوده است، اما هنوز هم میزان امید به زندگی در نواحی برخوردار جهان در حدود ۲۰ سال بیشتر از مناطق کم‌برخوردار است. نمودار زیر، روند تغییر امید به زندگی در جهان را نشان می‌دهد:



همان‌طور که مشخص است، شاخص امید به زندگی در جهان **افزایش** یافته است و یکی از عوامل مؤثر در این شاخص، مقدار استفاده از مواد شوینده و میزان بهداشت عمومی است. با افزایش سطح بهداشت عمومی، مقدار شاخص امید به زندگی **بیشتر** می‌شود. توجه داریم که در حال حاضر، مقدار این شاخص در سطح جهان، **تقریباً برابر با ۶۵ سال** است.

۶۹- در رابطه با ترکیب اصلی سازنده بنزین، کدام مطلب زیر درست است؟

۱) نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به کربن در این ماده، کمتر از مقدار این نسبت در ساختار بنزن است.
۲) شمار اتم‌های کربن موجود در ساختار این ماده، بیشتر از نصف شمار اتم‌های کربن در وازلین است.
۳) یک نمونه از این ماده، در هگزان حل شده و محلولی را ایجاد می‌کند که نور در آن پخش می‌شود.
۴) با استفاده از صابون مایع، می‌توان ذرات یک نمونه از این ماده را میان ذرات آب پخش کرد.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی و خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۸ ـ ۱۴۰۱)

بنزین، مخلوطی از آلکان‌های مختلف است که با فرمول مولکولی تقریبی C_8H_{18} مشخص می‌شود. بر این اساس، بنزین نوعی هیدروکربن بوده و می‌توان گفت این ماده از ذرات ناقطبی ساخته شده است. چون صابون از دو بخش قطبی و ناقطبی ساخته شده است، با استفاده از آن، می‌توان ذرات قطبی آب و ذرات ناقطبی بنزین را در کنار یکدیگر نگه داشت.

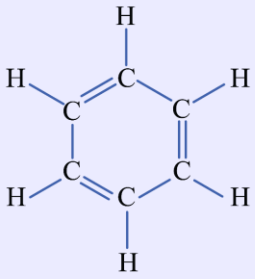
بررسی سایر گزینه‌ها:

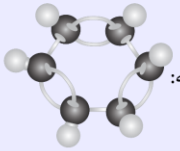
۱) نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به کربن در فرمول شیمیایی کلی بنزین، برابر با $\frac{18}{8} = 2/25$ است. این در حالی است که مقدار این نسبت در ساختار بنزن با فرمول شیمیایی C_6H_6، برابر با $\frac{6}{6} = 1$ است.

بنزن

هیدروکربن‌های آروماتیک، موادی با یک حلقه کربنی شش‌ضلعی هستند که حاوی ۳ پیوند دوگانه است. برای مثال، بنزن یک هیدروکربن حلقوی سیرنشده با فرمول شیمیایی $C_۶H_۶$ و فرمول ساختاری زیر است:

مدل نقطه خط: 

ساختار لوویس: 

مدل گلوله و میله: 

بنزن، سرگروه خانواده مواد آروماتیک (آروماتیک یعنی خوش بو و معطر) است. هر مول بنزن، در واکنش با ۳ مول گاز هیدروژن ($H_۲$)، به سیکلوهگزان تبدیل می‌شود. معادله واکنش انجام شده به‌صورت زیر است:

$$C_۶H_۶ + ۳H_۲ \rightarrow C_۶H_{۱۲}$$

۲) شمار اتم‌های کربن موجود در ساختار ذرات سازنده بنزین، برابر با ۸ عدد است درحالی‌که در ساختار وازلین، **۲۵ اتم کربن** وجود دارد. همان‌طور که مشخص است، عدد ۸ معادل با **کمتر از نصف عدد ۲۵** است.

گریس و وازلین

گریس، مخلوطی از هیدروکربن‌های سیرشده با فرمول تقریبی $C_{۱۸}H_{۳۸}$ است. وازلین نیز مخلوطی از هیدروکربن‌های سیرشده با فرمول تقریبی $C_{۲۵}H_{۵۲}$ است. با توجه به بیشتر بودن شمار اتم‌های کربن در مولکول‌های سازنده وازلین، قدرت نیروهای وان‌دروالسی در این ماده قوی‌تر بوده و یک نمونه از آن در مقایسه با گریس چسبنده‌تر است. توجه داریم، افرادی که با گریس و یا وازلین کار می‌کنند، پس از اتمام کار، دست خود را با بنزین یا نفت (مخلوطی از انواع هیدروکربن‌ها) می‌شویند. طی این فرایند، مولکول‌های ناقطبی گریس در بنزین یا نفت حل شده و از دست جدا می‌شوند. البته، پس از شستن دست با بنزین، پوست دست خشک می‌شود.

۳) یک نمونه از بنزین، از مولکول‌های ناقطبی ساخته شده و در هگزان که نوعی **حلال ناقطبی** است، حل می‌شود. با حل شدن این دو ماده در یکدیگر، نوعی **محلول همگن** ایجاد می‌شود که نور در آن پخش نمی‌شود.

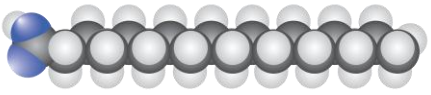
ماز

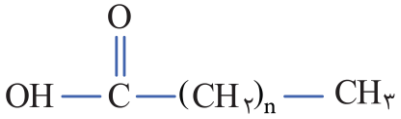
۷۰- در رابطه با نوعی اسید چرب با زنجیره هیدروکربنی سیرشده که نسبت تعداد پیوند اشتراکی به تعداد جفت الکترون‌های ناپیوندی در آن برابر ۱۴ است، کدام مطلب زیر نادرست است؟ ($O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱}$)

۱) شمار اتم‌های کربن موجود در ساختار این ماده، ۳ برابر شمار اتم‌های اکسیژن در ساختار روغن زیتون است.
۲) در ساختار مولکولی این ماده، همانند ساختار مولکولی اوره، یک پیوند دوگانه بین اتم‌ها برقرار شده است.
۳) انحلال‌پذیری یک نمونه از این ماده در هگزان، بیشتر از مقدار انحلال‌پذیری آن در مقداری آب است.
۴) ۹۴/۵ گرم از این ترکیب، معادل با ۰/۳۵ مول از آن بوده و در واکنش با سود، صابون تولید می‌کند.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ مفهومی و محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۶ ـ ۱۲۰۱)

تصویر زیر، ساختار کلی اسیدهای چرب را نشان می‌دهد:





فرمول اسید چرب با زنجیره هیدروکربنی سیرشده، به‌صورت $C_nH_{۲n}O_۲$ است. توجه داریم که در ساختار این ماده $۳n + ۲$ پیوند اشتراکی و ۴ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد. بر این اساس، ابتدا تعداد کربن موجود در ساختار اسید چرب را حساب می‌کنیم:

$$\frac{۳n + ۲}{۴} = ۱۴ \longrightarrow n = ۱۸$$

فرمول شیمیایی این اسید چرب به‌صورت $C_{۱۸}H_{۳۶}O_۲$ است. جرم مولی این ماده برابر با ۲۸۴ گرم بر مول است. در قدم اول، مقدار مول اسید چرب موجود در نمونه ۹۴/۵ گرمی از این ماده را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,mol\ C_{۱۸}H_{۳۶}O_۲ = ۹۴/۵\ g\ C_{۱۸}H_{۳۶}O_۲ \times \frac{۱\ mol\ C_{۱۸}H_{۳۶}O_۲}{۲۸۴\ g\ C_{۱۸}H_{۳۶}O_۲} \simeq ۰/۳۳۲\ mol$$

اسیدهای چرب، در واکنش با سدیم هیدروکسید، صابون‌های جامد را تولید می‌کنند. معادله این واکنش به‌صورت زیر است:

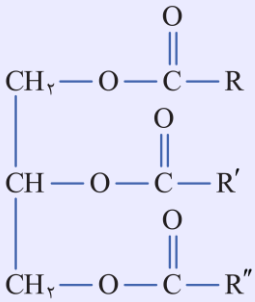
$$C_{۱۸}H_{۳۶}O_۲(s) + NaOH(aq) \rightarrow C_{۱۷}H_{۳۵}COONa(s) + H_۲O(l)$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) در ساختار اسید چرب مورد نظر، ۱۸ اتم کربن وجود دارد. بر این اساس، می‌توان گفت شمار اتم‌های کربن موجود در ساختار این ماده، ۳ برابر شمار اتم‌های اکسیژن در ساختار روغن زیتون است. فرمول مولکولی روغن زیتون به‌صورت $C_{۵۷}H_{۱۰۴}O_۶$ است.

روغن زیتون

مولکول‌های روغن زیتون، نامحلول در آب بوده و از دو بخش قطبی (گروه‌های عاملی استری) و ناقطبی (زنجیره‌های هیدروکربنی موجود در انتهای مولکول) تشکیل شده‌اند. ساختار کلی روغن زیتون به‌صورت زیر است:



۲) در ساختار گروه عاملی کربوکسیل موجود در اسیدهای چرب، یک پیوند دوگانه $C = O$ وجود دارد. در ساختار مولکولی اوره نیز یک پیوند اشتراکی دوگانه $C = O$ وجود دارد.

۳) اسیدهای چرب، از ذرات ناقطبی ساخته شده و بر این اساس، در حلال‌های ناقطبی مثل هگزان حل می‌شوند. این در حالی است که آب، **یک حلال قطبی** بوده و اسیدهای چرب در آن حل نمی‌شوند.

مای

۷۱- کدام مطلب زیر نادرست است؟

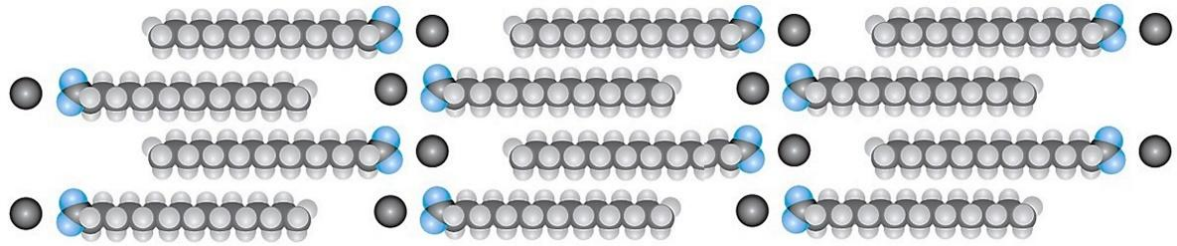
۱) نوع نیروی بین‌ذره‌ای غالب در یک نمونه صابون، مشابه نوعی نیروی بین‌ذره‌ای در بنزین است.
۲) شمار عناصر موجود در پاک‌کننده‌های غیرصابونی، برابر با شمار عناصر در ساختار آمونیوم کربنات است.
۳) کاتیون چند اتمی موجود در ساختار برخی از انواع صابون‌های مایع، ۴ پیوند اشتراکی در ساختار خود دارد.
۴) اگر کاتیون سدیم در صابون را با یون آمونیوم جایگزین کنیم، قدرت نیروی بین ذرات این ماده، کاهش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۰ ـ ۱۲۰۱)

در ساختار پاک‌کننده‌های غیرصابونی، ۵ عنصر کربن، هیدروژن، گوگرد، اکسیژن و سدیم است. این در حالی است که در ساختار ترکیب **آمونیوم کربنات** با فرمول شیمیایی $(NH_۴)_۲CO_۳$، فقط **۴ عنصر نیتروژن، هیدروژن، کربن** و **اکسیژن** یافت می‌شود.

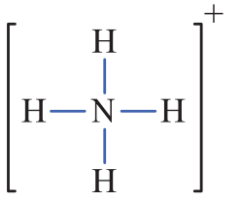
بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) صابون‌ها، انواعی از ترکیب‌های یونی به شمار رفته و از کنار هم قرار گرفتن آنیون‌ها و کاتیون‌ها تشکیل شده‌اند. در واقع، به نمک سدیم، پتاسیم و یا آمونیوم اسیدهای چرب دراز زنجیر، صابون گفته می‌شود. در یک نمونه از صابون، اجزای آنیونی و کاتیون به‌صورت زیر در کنار هم قرار می‌گیرند:



در این حالت، بین بخش قطبی ذرات صابون، نیروهایی از جنس پیوند یونی (جاذبه بین یون‌هایی با بار ناهمنام) و بین دم هیدروکربنی ذرات صابون نیز نیروی وان‌درواالسی برقرار می‌شود. چون دم هیدروکربنی در ساختار صابون خیلی بلند است و بخش عمده از این ماده را تشکیل می‌دهد، پس نوع نیروی بین ذره‌ای غالب در صابون را می‌توان نیروی وان‌درواالسی در نظر گرفت. بنزین نیز مخلوطی از هیدروکربن‌ها بوده و چون از ذرات ناقطبی ساخته شده است، نوع نیروی بین‌ذره‌ای در آن از جنس وان‌درواالسی خواهد بود.

۳) یون چنداتمی موجود در صابون‌های مایع، معادل با یون آمونیوم است. ساختار یون آمونیوم به‌صورت زیر است:



در ساختار این یون، ۴ پیوند اشتراکی وجود دارد.

۴) از آنجا که صابون‌های جامد دمای ذوب بالاتری نسبت به صابون‌های مایع دارند، پس می‌توان گفت اگر یون Na^+ موجود در نوعی صابون را با NH_4^+ جایگزین کنیم، قدرت نیروی بین‌ذره‌ای در صابون کاهش یافته و بر این اساس، دمای ذوب صابون کاهش می‌یابد.

دمای ذوب

ذوب، معادل با تغییر حالت یک ماده از جامد به مایع بوده و انجماد، معادل با تغییر حالت یک ماده از مایع به جامد است. در این رابطه داریم:



دمایی که در آن یک ماده بین حالت‌های مایع و جامد تغییر حالت می‌دهد را دمای ذوب یا انجماد می‌گویند. برای مثال، دمای ذوب یخ که معادل با همان دمای انجماد آب است، برابر با ۰°C می‌باشد. برای اینکه یک ماده از حالت جامد به حالت مایع در بیاید، باید نیروهای بین ذره‌ای در آن سست شود تا ذرات آن ماده بتوانند به آسانی روی یکدیگر جابه‌جا شوند. پس با افزایش قدرت نیروهای بین ذره‌ای، انرژی لازم برای سست کردن این نیروها بیشتر شده و دمای ذوب آن ماده افزایش پیدا می‌کند.

ماز

۷۲- کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

۱) بیماری وبا در طول تاریخ فقط یک بار در جهان همه‌گیر شده و طی این فرایند، جان میلیون‌ها انسان را گرفته است.
۲) اگر ظروف چرب را به خاکستر آغشته کرده و سپس با آب گرم شست‌وشو بدهیم، این ظروف آسان‌تر تمیز می‌شوند.
۳) مولکول‌های عسل دارای تعدادی گروه عاملی با ساختار $-COOH$ بوده و با ذرات آب پیوند هیدروژنی می‌دهند.
۴) پارچه پلی‌استری از الیاف مصنوعی ساخته شده و چسبندگی لکه‌های چربی روی آن‌ها کمتر از پارچه نخی است.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی و خط‌به‌خط ـ سریع ـ صفحهٔ ۹ ـ ۱۲۰۱)

خاکستر حاوی برخی از **مواد قلیایی** و **اکسیدهای فلزی** بوده و در واکنش با چربی‌ها، این مواد را به ترکیب‌های محلول در آب تبدیل می‌کند. فرایند انجام شده به‌صورت زیر است:

مواد محلول در آب ⟵ مواد موجود در خاکستر + چربی روی ظروف

بر این اساس، اگر ظرف‌های چرب را به خاکستر آغشته کرده و سپس با آب گرم شست‌وشو بدهیم، این ظروف آسان‌تر از حالتی تمیز می‌شوند که از خاکستر استفاده نکنیم.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) بیماری وبا یک بیماری واگیردار است و در طول تاریخ بارها در جهان همه‌گیر شده است و طی این فرایند جان میلیون‌ها انسان را گرفته است. این بیماری به دلیل آلوده شدن آب و نبود بهداشت شایع می‌شود.

بیماری وبا

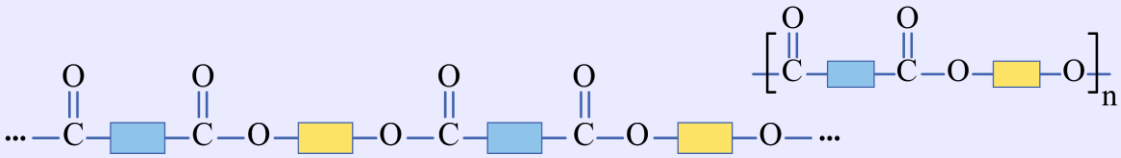
بیماری وبا که یک بیماری واگیردار است، به دلیل آلوده‌شدن آب‌ها و نبودن بهداشت در جامعه، بارها در جهان همه‌گیر شده و جان میلیون‌ها انسان را گرفته است. در طول زمان، استفاده از صابون و توجه به نظافت و بهداشت در جامعه گسترش یافت و سبب شد تا مقدار آلودگی‌ها، میکروب‌ها و عوامل بیماری‌زا در محیط‌های فردی و همگانی کاهش یافته و سطح بهداشت جامعه افزایش پیدا کند. بر این اساس، می‌توان گفت احتمال بروز وبا در طول زمان کاهش یافته است. البته، توجه داریم که این بیماری هنوز هم می‌تواند برای هر جامعه‌ای تهدیدکننده باشد. ساده‌ترین و مؤثرترین راه پیشگیری از این بیماری، رعایت بهداشت فردی و همگانی است.

۳) لکه عسل به راحتی با آب شسته شده و در آن پخش می‌شود، چراکه عسل حاوی مولکول‌های قطبی است که در ساختار خود شمار قابل توجهی گروه عاملی هیدروکسیل (گروه الکلی با ساختار $-OH$) دارند. هنگامی‌که عسل وارد آب می‌شود، مولکول‌های سازنده آن با مولکول‌های آب پیوند هیدروژنی برقرار می‌کنند و در سرتاسر آن پخش می‌شوند. به این ترتیب، آب پاک‌کننده مناسبی برای لکه‌های شیرینی مانند آب قند، شربت آبلیمو و چای شیرین است. توجه داریم که گروه عاملی با ساختار $-COOH$، معادل با گروه عاملی کربوکسیل است.

۴) پلی‌استر، از جمله الیاف ساختگی بوده و نخ، از جمله الیاف طبیعی است که با استفاده از پنبه تولید می‌شود. در شرایط یکسان، پاک‌کننده‌های صابونی لکه‌های چربی روی پارچه‌های نخی را بهتر از پارچه‌های پلی‌استری پاک می‌کنند. بر این اساس، می‌توان گفت میزان چسبندگی لکه‌های چربی بر روی پارچه‌های پلی‌استری در مقایسه با پارچه‌های نخی بیشتر است.

پلی‌استرها

با افزایش نیاز بشر به پوشاک، الیاف پنبه‌ای دیگر پاسخگوی نیاز بشر نبود. شیمی‌دان‌ها با بررسی انواع مواد آلی، موفق به ساخت پلیمرهایی شدند که در آن‌ها علاوه بر اتم‌های H و C، اتم‌های O و N نیز وجود داشت. پلی‌استرها و پلی‌آمیدها، دو گروه پلیمرهای جدید هستند که به پلیمرهای تراکمی معروف شده‌اند. پلی‌استرها گروهی از پلیمرهای تراکمی هستند که در آن‌ها اتم‌های C، H و O وجود دارد. در این پلیمرها، گروه عاملی استری در طول مولکول تکرار شده است. ساختار پلی‌استرها به‌صورت زیر است:



پلی‌استرها الیاف مصنوعی (ساختگی) هستند که با استفاده از آن‌ها می‌توان الیاف، نخ و در نهایت پارچه‌های پلی‌استری را تولید کرد. الیاف پلی‌استری، به‌طور کلی ناقطبی هستند.

۷۳- برای تهیهٔ نوعی صابون، یک اسید چرب با فرمول شیمیایی $C_{۱۷}H_{۳۵}COOH$ را با سدیم هیدروکسید واکنش می‌دهند. در این واکنش، به‌تقریب چند درصد جرمی فراورده‌ها را صابون تشکیل می‌دهد؟

$(Na = ۲۳ , O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۸۸/۶ ۲) ۹۲/۱ ۳) ۹۴/۴ ۴) ۹۶/۸

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶ ـ ۱۲۰۱)

برای حل این سؤال، باید مراحل زیر را طی کنیم:

۱) معادله واکنش تولید صابون را می‌نویسیم

۲) درصد جرمی صابون را در میان فراورده‌ها حساب می‌کنیم

فرمول شیمیایی اسید چرب مورد نظر به‌صورت $C_{۱۷}H_{۳۵}COOH$ و یا $CH_۳(CH_۲)_{۱۶}COOH$ است. اسیدهای چرب، بر اساس معادله زیر با سدیم هیدروکسید واکنش داده و در نهایت صابون تولید می‌کنند:

آب + صابون جامد ⟵ سدیم هیدروکسید + اسید چرب

ابتدا معادله واکنش انجام شده را می‌نویسیم:

$$CH_۳(CH_۲)_{۱۶}COOH + NaOH \longrightarrow CH_۳(CH_۲)_{۱۶}COONa + H_۲O$$

طی این فرایند، یک مول آب به همراه یک مول صابون جامد تولید می‌شود. جرم مولی آب برابر $۱۸g.mol^{-۱}$ است و جرم مولی صابون جامد حاصل از این واکنش نیز برابر است با:

$$\text{جرم مولی صابون} = (۱۸ \times ۱۲) + (۳۵ \times ۱) + (۲ \times ۱۶) + ۲۳ = ۳۰۶\ g.mol^{-۱}$$

در نهایت درصد جرمی صابون را در فراورده‌ها حساب می‌کنیم:

$$\text{درصد جرمی صابون در فراورده‌ها} = \frac{\text{جرم مولی صابون}}{\text{مجموع جرم مولی کل فراورده‌ها}} \times ۱۰۰ = \frac{۳۰۶}{۳۰۶ + ۱۸} \times ۱۰۰ = \frac{۳۰۶۰۰}{۳۲۴} \simeq ۹۴/۴ \text{ درصد}$$

۷۴- کدام موارد از عبارت‌های زیر درست هستند؟

الف ـ آب، از ذرات قطبی ساخته شده و پاک‌کنندهٔ مناسبی برای لکه‌های شیرینی مانند آب قند به شمار می‌رود.

ب ـ پاک‌کننده‌های غیرصابونی از مواد آروماتیک بوده و با ایجاد برهم‌کنش میان ذره‌ها، آلودگی‌ها را پاک می‌کنند.

ج ـ به منظور جلوگیری از تشکیل رسوب در هنگام استفاده از آب سخت، به صابون نمک‌های سولفات اضافه می‌کنند.

د ـ معروف‌ترین صابون سنتی ایران، حالت جامد داشته و به خاطر افزودنی‌های مناسب، در شستن موی چرب کاربرد دارد.

۱) «الف» و «ب» ۲) «ب» و «ج» ۳) «ج» و «د» ۴) «الف» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی و خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۱ ـ ۱۲۰۱)

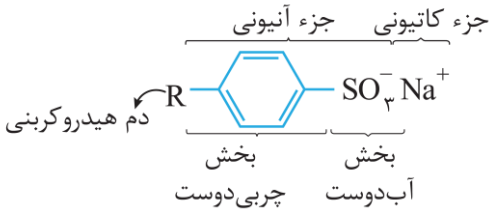
عبارت‌های (الف) و (ب) درست هستند.

بررسی موارد:

الف آلاینده‌ها شامل موادی می‌شوند که بیش از مقدار طبیعی در یک محیط، ماده یا یک جسم وجود دارند. گل و لای آب، گرد و غبار هوا، لکه‌های چربی و مواد غذایی روی لباس‌ها و پوست بدن نمونه‌هایی از انواع آن‌ها هستند. برای اینکه یک ماده بتواند نوعی آلاینده را از محیط پاک کند، باید بتواند ذرات آلاینده مورد نظر را در خود حل کند. آب قند و شربت آبلیمو، حاوی مولکول‌های بسیار قطبی از جمله **ذرات گلوکز** $(C_۶H_{۱۲}O_۶)$ و **شکر** $(C_{۱۲}H_{۲۲}O_{۱۱})$ هستند که هر یک حاوی **چندین گروه عاملی هیدروکسیل** است. گروه هیدروکسیل موجود در مولکول‌های سازنده این مواد، با ذرات آب پیوند هیدروژنی برقرار خواهد کرد، درنتیجه آب قند و شربت آبلیمو، به راحتی در آب حل می‌شوند و از محیط پاک می‌شوند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پ) پاک‌کننده‌های غیرصابونی، دارای یک حلقه بنزنی در ساختار بخش آنیونی خود بوده و از جمله **مواد آروماتیک** به شمار می‌روند. ساختار کلی این مواد به‌صورت زیر است:



این مواد، همانند پاک‌کننده‌های صابونی، بر اساس برهم‌کنش میان ذره‌ها آلودگی‌ها را پاک می‌کنند. در نقطه مقابل، **پاک‌کننده‌های خورنده** افزون بر این **برهم‌کنش‌ها**، با آلاینده‌ها واکنش می‌دهند و از این طریق نیز سبب زدودن آن‌ها می‌شوند.

پاک‌کننده‌های غیرصابونی

نقش پاک‌کنندگی صابون باعث شد تا کاربرد آن از پاکیزگی و تأمین بهداشت فردی و محیط خانه، به مراکز صنعتی، بیمارستانی و اداری نیز گسترش پیدا کند. این روند، سبب رشد چشمگیر صابون‌سازی و تبدیل آن به یک صنعت بزرگ در جهان شد. این صنعت، نقش چشمگیری در کاهش بیماری گوناگون و افزایش سطح بهداشت در جهان داشته است. در این زمان، عوامل زیر، چون سدی بر سر راه صنعت صابون‌سازی قرار گرفتند:

۱) با افزایش جمعیت جهان، مصرف صابون نیز افزایش یافت.

۲) برای تولید صابون در مقیاس انبوه، به میزان زیادی چربی به‌عنوان مواد اولیه نیاز بود و تأمین این میزان چربی، به یک چالش تبدیل شد.

۳) تأمین صابون مورد نیاز جهان به روش‌های سنتی تقریباً ناممکن بود.

۴) پاک‌کننده‌های صابونی در همه شرایط به خوبی عمل نمی‌کردند و استفاده از آن‌ها در برخی از موقعیت‌ها مثل سفرهای دریایی و صنایعی که از آب شور استفاده می‌کردند، پاسخگوی نیاز انسان نبود.

نگرانی‌هایی از این دست، سبب شد تا شیمی‌دان‌ها برای شناسایی و تولید دیگر پاک‌کننده‌ها ترغیب شوند. شیمی‌دان‌ها به دنبال موادی بودند که علاوه بر قدرت پاک‌کنندگی بالا، بتوان آن‌ها را به میزان انبوه و با قیمت مناسب تولید کرد. با توجه به رابطه میان ساختار و رفتار یک ماده، شیمی‌دان‌ها به دنبال موادی بودند که همانند صابون‌ها، ساختاری دوگانه‌دوست (هم چربی‌دوست و هم آب‌دوست) داشته باشند. سرانجام آن‌ها توانستند با استفاده از بنزن و دیگر مواد اولیه تولید شده در صنایع پتروشیمی، پاک‌کننده‌های غیرصابونی را بسازند.

چ) نمک‌های فسفات، برای جلوگیری از تشکیل رسوب صابون با یون‌های کلسیم و منیزیم موجود در آب سخت، به صابون اضافه می‌شوند. یون سولفات با فرمول شیمیایی SO_4^{2-}، چنین قابلیتی را ندارد. توجه داریم که در آب سخت، نمک‌های فسفات با یون‌های کلسیم و منیزیم واکنش می‌دهند. معادله واکنش انجام شده طی این فرایند به‌صورت زیر است:

$$2PO_4^{3-}(aq) + 3Mg^{2+}(aq) \rightarrow Mg_3(PO_4)_2(s)$$
$$2PO_4^{3-}(aq) + 3Ca^{2+}(aq) \rightarrow Ca_3(PO_4)_2(s)$$

افزودنی‌های صابون

تأثیر افزودنی‌های مختلف صابون‌ها به شرح زیر است:



افزودنی‌های صابون

نمک‌های فسفات	مواد کلردار	مواد گوگرددار
افزایش قدرت پاک‌کنندگی صابون در آب‌های سخت	افزایش خاصیت ضدعفونی کنندگی و میکروب‌کشی	از بین بردن جوش صورت و قارچ‌های پوستی

د) صابون طبیعی معروف به صابون مراغه، معروف‌ترین صابون سنتی ایران است. برای تهیه این صابون، پیه گوسفند و سود سوزآور را در دیگ‌های بزرگ با آب برای چندین ساعت می‌جوشانند و پس از قالب‌گیری، آن‌ها را در آفتاب خشک می‌کنند. این صابون حالت جامد داشته و از آنجا که فاقد افزودنی شیمیایی بوده و خاصیت بازی مناسبی دارد، از آن برای شست‌وشوی موهای چرب استفاده می‌شود.

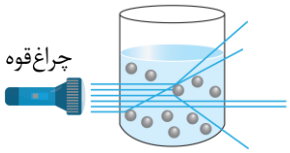
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۵- کدام‌یک از مطالب زیر نادرست است؟

۱) با ریختن صابون در روغن، ذرات صابون از سمت بخش آب‌گریز خود به طرف ذرات روغن جهت‌گیری می‌کنند.
۲) مخلوطی از پودر آلومینیم و سدیم هیدروکسید، همانند سفیدکننده‌ها، یک پاک‌کننده خورنده به شمار می‌رود.
۳) رنگ‌های پوششی از ذرات ریز ماده ساخته شده و با قرار دادن یک نمونه از آن‌ها در مکان ثابت، ته‌نشین می‌شود.
۴) کلوئیدها از توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت از هم تشکیل شده و کمتر از سوسپانسیون‌ها نور را پخش می‌کنند.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی و خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۳ ـ ۱۲۰۱)

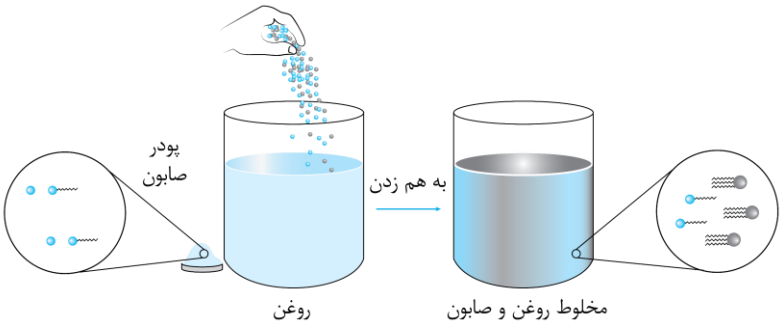
رنگ‌های پوششی نوعی **کلوئید** هستند. کلوئیدها **مخلوط‌هایی از دو یا چند ماده** به حساب می‌آیند که در برخی از ویژگی‌های خود، به محلول‌ها شباهت دارند و در برخی از ویژگی‌های خود، با محلول‌ها تفاوت داشته و به **مخلوط‌های ناهمگن** شبیه هستند. ذره‌های سازنده **کلوئیدها** عموماً به‌صورت مولکول‌های بزرگ و یا توده‌های مولکولی هستند که اندازه آن‌ها **بزرگ‌تر** از اندازه حل‌شونده‌های موجود در محلول‌های **همگن** است. چون ذرات موجود در کلوئیدها **بزرگ‌تر** از اندازه ذرات موجود در محلول‌ها است، اگر پرتوی نوری از درون کلوئیدها بگذرد، توسط ذره‌های سازنده کلوئید پخش شده و به چشم **بازتابیده** می‌شود و به همین خاطر است که مسیر عبور نور در کلوئیدها قابل مشاهده است. تصویر زیر، نمایی از این فرایند را نشان می‌دهد:



توجه داریم که سطح ذرات موجود در ساختار کلوئیدها **باردار** بوده و به همین خاطر، این مواد با ماندن در یک موقعیت ثابت ته‌نشین نمی‌شوند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) تصویر زیر، مخلوطی از روغن و صابون را نشان می‌دهد:



دم هیدروکربنی ذرات صابون، بخش آب‌گریز (چربی‌دوست) این ماده را تشکیل می‌دهند. با ریختن صابون در روغن، دم هیدروکربنی ذرات صابون به طرف بخش ناقطبی مولکول‌های روغن جهت‌گیری کرده و در این ماده حل می‌شوند.

۲) مخلوطی از پودر آلومینیم و سدیم هیدروکسید، همانند سفیدکننده‌ها، جوهر نمک و محلول سود، یک پاک‌کننده خورنده به شمار می‌رود. با ریختن این مخلوط در آب، یک واکنش شیمیایی انجام شده و مقداری گرما به همراه گاز هیدروژن تولید می‌شود. گرما و گاز هیدروژن آزاد شده در این واکنش، موجب تخریب ساختار آلاینده‌ها شده و قدرت پاک‌کنندگی این مخلوط را افزایش می‌دهد.

۴) کلوئیدها از توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت تشکیل شده‌اند و چون اندازه ذرات سازنده آن‌ها کوچک‌تر از سوسپانسیون‌ها است، کمتر از سوسپانسیون‌ها نور را پخش می‌کنند.

کلوئیدها

در سال ۱۸۶۰ میلادی، دانشمندی به نام توماس گراهام برای توصیف ویژگی‌های برخی از مواد مثل چسب‌ها، ژلاتین و نشاسته، از واژه «کلوئید» استفاده کرد. کلوئیدها مخلوط‌هایی از دو یا چند ماده به حساب می‌آیند که در برخی از ویژگی‌های خود، به محلول‌ها شباهت دارند و در برخی از ویژگی‌های خود، با محلول‌ها تفاوت داشته و به مخلوط‌های ناهمگن شبیه هستند. ذره‌های سازنده کلوئیدها عموماً به‌صورت مولکول‌های بزرگ و یا توده‌های مولکولی هستند که اندازه آن‌ها بزرگ‌تر از اندازه حل‌شونده‌های موجود در محلول‌ها است. چون اندازه ذرات موجود در کلوئیدها بزرگ‌تر از اندازه ذرات موجود در محلول‌ها است، اگر پرتوی نوری از درون کلوئیدها بگذرد، توسط ذره‌های سازنده کلوئید پخش شده و به چشم بازتابیده می‌شود و به همین خاطر است که مسیر عبور نور در کلوئیدها قابل مشاهده است.

۷۶- کدام‌یک از مطالب زیر درست است؟

۱) پاک‌کننده با فرمول $C_{۱۲}H_{۲۵}-C_۶H_۴SO_۳Na$، با یون‌های موجود در آب سخت واکنش داده و رسوب تولید می‌کند.
۲) علامت بار سطحی قطرهٔ روغن که به وسیلهٔ ذرات صابون به‌صورت کلوئید درآمده، مشابه علامت بار یون گالیم است.
۳) مخلوط چربی‌ها، از مواد ناقطبی ساخته شده و بین این ذرات، امکان برقرار شدن پیوند هیدروژنی وجود ندارد.
۴) دمای محیط، همانند مقدار صابون مصرف شده، از عوامل مؤثر بر قدرت پاک‌کنندگی صابون است.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۱ ـ ۱۲۰۱)

در دماهای بالاتر، ساختار چربی‌های موجود بر روی سطح لباس **سست** می‌شود. بر این اساس، افزایش دما قدرت پاک‌کنندگی صابون را افزایش می‌دهد. **افزایش** مقدار صابون نیز با **کاهش** میزان لکه‌های باقی‌مانده روی پارچه، قدرت پاک‌کنندگی صابون را **افزایش** می‌دهد.

قدرت پاک‌کنندگی صابون

صابون‌های مختلف، همه لکه‌های موجود بر روی پارچه‌ها را به یک اندازه از بین نمی‌برند. در واقع، هر چقدر که یک پاک‌کننده صابونی بتواند مقدار بیشتری از آلاینده‌ها و چربی‌های روی لباس را بزداید، قدرت پاک‌کنندگی بیشتری دارد. عوامل مؤثر بر قدرت پاک‌کنندگی صابون، به شرح زیر هستند:

۱. میزان سختی آب

صابون‌ها در مجاورت با آب سخت، با دو یون کلسیم و منیزیم موجود در این نمونه از آب رسوب سفیدرنگی ایجاد می‌کنند که بر روی لباس دیده می‌شود. در این حالت، قدرت پاک‌کنندگی صابون به شدت کاهش می‌یابد.

۲. جنس پارچه

چسبندگی لکه‌های چربی بر روی لباس‌های نخی یا همان پنبه‌ای کمتر از پارچه‌های پلی‌استری است. بر این اساس، می‌توان گفت صابون بر روی لکه‌های ایجاد شده بر سطح پارچه‌های نخی اثر بیشتری دارد.

۳. آنزیم

آنزیم نوعی کاتالیزگر است که فرایندهای تجزیه مواد موجود در لکه‌ها را تسریع می‌بخشد و این مواد را به مواد ساده‌تر تبدیل می‌کند. اضافه کردن آنزیم به صابون، قدرت پاک‌کنندگی صابون را افزایش می‌دهد.

۴. دما

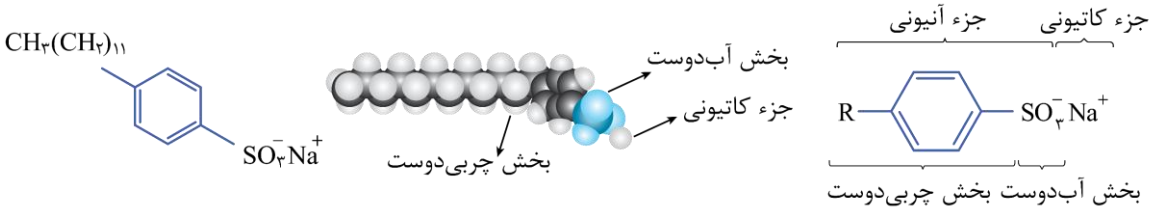
علاوه بر این‌که در دماهای بالاتر، ساختار چربی‌های موجود بر روی سطح لباس سست می‌شود، افزایش دما موجب تأمین‌شدن گرمای واکنش‌های انجام‌گرفته بر لکه می‌شود، پس افزایش دما نیز قدرت پاک‌کنندگی صابون را افزایش می‌دهد.

۵. افزودنی‌های شیمیایی

اضافه کردن جوش شیرین به صابون، موجب ایجاد خاصیت بازی و افزایش قدرت پاک‌کنندگی آن می‌شود. افزودن نمک‌های فسفات به صابون نیز قدرت پاک‌کنندگی آن را در مواجهه با آب سخت افزایش می‌دهد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) پاک‌کننده‌ای با فرمول $R-C_۶H_۴-SO_۳Na$، یک پاک‌کننده غیرصابونی است. حلقه بنزنی موجود در این ماده، با نماد $C_۶H_۴$ مشخص می‌شود. ساختار این پاک‌کننده‌ها به‌صورت زیر است:

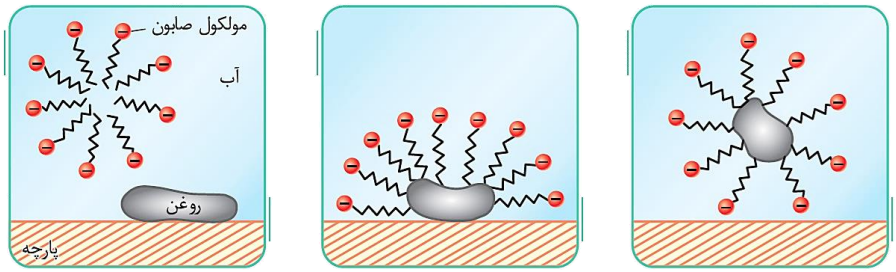


پاک‌کننده‌های غیرصابونی، از مواد پتروشیمیایی طی واکنش‌های پیچیده در صنعت تولید می‌شوند. این مواد قدرت **پاک‌کنندگی بیشتری** نسبت به صابون دارند و در آب‌های سخت نیز خاصیت پاک‌کنندگی خود را حفظ می‌کنند، زیرا با یون‌های موجود در این آب‌ها رسوب نمی‌دهند.

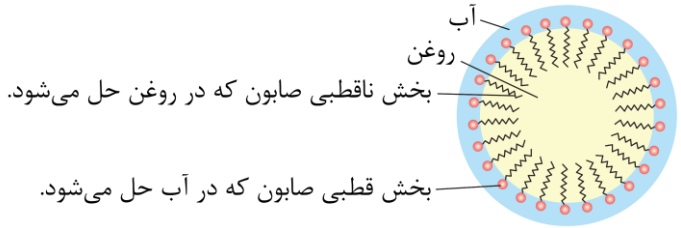
ساختار پاک‌کننده‌های غیرصابونی

پاک‌کننده‌های غیرصابونی، با استفاده از بنزن و دیگر مواد اولیه موجود در صنایع پتروشیمی تولید می‌شوند. پاک‌کننده‌های غیرصابونی نیز همانند پاک‌کننده‌های صابونی از یک بخش آب‌دوست (بخش باردار) و یک بخش چربی‌دوست (حلقه بنزنی و زنجیر هیدروکربنی، که ناقطبی هستند) تشکیل شده‌اند. در هنگام استفاده از این پاک‌کننده‌ها، مولکول‌های چربی به زنجیره هیدروکربنی پاک‌کننده می‌چسبند و بخش آب‌دوست مولکول‌های پاک‌کننده نیز باعث پخش‌شدن چربی‌ها در آب می‌شود.

۲) **گالیم**، نوعی **عنصر فلزی** بوده و نماد یون پایدار آن به‌صورت $_{۳۱}Ga^{۳+}$ است. از طرفی مولکول‌های صابون از بخش ناقطبی خود با مولکول‌های روغن، جاذبه برقرار می‌کنند؛ بنابراین بخش ناقطبی صابون داخل قطرهٔ روغن قرار دارد و بخش قطبی آن که **بار منفی** دارد، با آب جاذبه برقرار می‌کند و سطح بیرونی قطره دارای بار منفی است. روند انحلال روغن و چربی توسط ذرات صابون به‌صورت زیر است:



ساختار دقیق‌تر قطرات چربی تشکیل شده طی این فرایند، به‌صورت زیر است:



۳) چربی‌ها مخلوطی از اسیدهای چرب و استرهای سنگین هستند. در ساختار اسیدهای چرب عامل کربوکسیل وجود داشته و چون در این عامل، اتم هیدروژن متصل به اکسیژن وجود دارد، بین اسیدهای چرب پیوند هیدروژنی برقرار می‌شود. البته توجه داریم که نوع نیروی بین ذره‌ای غالب در چربی‌ها از جنس واندروالسی است.

ماز

۷۷- اگر ۲۷/۸ گرم از یک صابون جامد با ۰/۰۵ مول نمک کلسیم کلرید موجود در محلولی از آن به‌طور کامل واکنش دهد، نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به شمار اتم‌های اکسیژن موجود در واحد فرمولی این صابون کدام است؟ (صابون مورد نظر، دارای زنجیر هیدروکربنی سیرشده است. $g.mol^{-۱}$: $H=۱, C=۱۲, O=۱۶, Na=۲۳, Mg=۲۴, Cl=۳۵/۵$)

۱) ۱۴/۵ ۲) ۱۵/۵ ۳) ۱۶/۵ ۴) ۱۷/۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۹ ـ ۱۲۰۱)

برای حل این سؤال، باید مراحل زیر را طی کنیم:

۱) معادله واکنش صابون با کلسیم کلرید را مشخص می‌کنیم.

۲) جرم مولی صابون را به‌دست می‌آوریم.

۳) فرمول شیمیایی صابون را به‌دست می‌آوریم.

مولکول‌های صابون در واکنش با کاتیون‌های موجود در آب‌های سخت، به رسوب تبدیل می‌شوند و نمی‌توانند به‌عنوان یک پاک‌کننده ایفای نقش کنند. معادله واکنش انجام شده به‌صورت زیر است:

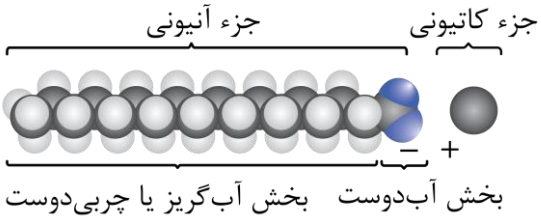
$$۲RCOONa(aq) + CaCl_۲(aq) \longrightarrow (RCOO)_۲Ca(s) + ۲NaCl(aq)$$

با توجه به معادله واکنش مورد نظر، تعداد مول صابون و جرم مولی آن را حساب می‌کنیم:

$$?\,mol\ \text{صابون} = ۰/۰۵\,mol\,CaCl_۲ \times \frac{۲\,mol\ \text{صابون}}{۱\,mol\,CaCl_۲} = ۰/۱\,mol\ \text{صابون}$$

$$\text{جرم مولی صابون} = \frac{\text{جرم صابون}}{\text{تعداد مول صابون}} = \frac{۲۷/۸\ g}{۰/۱\ mol} = ۲۷۸ g.mol^{-۱}$$

ساختار کلی صابون‌ها به‌صورت زیر است:



اگر شمار اتم‌های کربن موجود در زنجیر آلکیل صابون را n در نظر بگیریم، فرمول صابون جامد $C_nH_{۲n+۱} - COONa$ خواهد بود. بنابراین جرم مولی صابون برابر است با:

(جرم‌های اتم اکسیژن) + (جرم‌های اتم هیدروژن در زنجیر آلکیل) + (جرم‌های اتم کربن در زنجیر آلکیل) = جرم مولی صابون

$\Longrightarrow$ + (جرم یون سدیم) + (جرم اتم کربن در بخش قطبی)

$$\text{جرم مولی صابون} = (۱۲n) + (۲n + ۱) + (۲ \times ۱۶) + ۱۲ + ۲۳ = ۱۴n + ۶۸ = ۲۷۸ \Longrightarrow n = ۱۵$$

در نتیجه در زنجیر آلکیل این صابون $۲n + ۱ = (۲ \times ۱۵) + ۱ = ۳۱$ اتم هیدروژن وجود دارد. بر این اساس، نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به شمار اتم‌های اکسیژن موجود در واحد فرمولی این صابون برابر با ۱۵/۵ می‌شود.

ماز

۷۸- در رابطه با واکنش میان مخلوطی از پودر فلز آلومینیم و سود با آب، کدام مطلب زیر نادرست است؟

۱) گاز تولید شده در این واکنش، از مولکول‌های دواتمی که حاوی یک پیوند دوگانه هستند، تشکیل شده است.

۲) در این واکنش، مقداری گرما تولید شده و گرمای تولید شده، قدرت پاک‌کنندگی مخلوط را افزایش می‌دهد.

۳) مخلوط مورد نظر، با چربی‌هایی که راه لوله‌ها و مجاری را مسدود کرده‌اند، واکنش شیمیایی می‌دهد.

۴) عناصر فلزی شرکت‌کننده در این واکنش، متعلق به یک تناوب مشابه جدول دوره‌ای هستند.

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی و خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۳ ـ ۱۲۰۱)

نوعی پاک‌کننده که به شکل پودر عرضه می‌شود، شامل مخلوط جامدی از **سدیم هیدروکسید** و **پودر آلومینیم** است. این پاک‌کننده خورنده برای باز کردن مجاری مسدود شده در برخی وسایل و دستگاه‌های صنعتی استفاده می‌شود. در این واکنش، مخلوط آلومینیم و سدیم هیدروکسید با آب واکنش داده و **گاز هیدروژن** تولید می‌شود. معادلهٔ انجام شده به‌صورت زیر است و بر اثر انجام واکنش، گاز هیدروژن تولید می‌شود:

$$۲Al(s) + ۲NaOH(s) + ۶H_۲O(l) \rightarrow ۲NaAl(OH)_۴(aq) + ۳H_۲(g)$$

گاز هیدروژن تولید شده، از مولکول‌های دواتمی که حاوی یک پیوند یگانه هستند، تشکیل شده است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) واکنش انجام شده، یک واکنش شیمیایی **گرماده** بوده و همین گرمای تولید شده، موجب افزایش دمای محیط و به دنبال آن **افزایش** قدرت پاک‌کنندگی مواد شوینده می‌شود.

۳) پاک‌کننده مورد نظر، نوعی **پاک‌کننده خورنده** است. پاک‌کننده‌های خورنده شامل **مواد اسیدی** یا **بازی** هستند که علاوه بر داشتن برهم‌کنش فیزیکی با آلاینده‌ها، با آن‌ها **واکنش شیمیایی** نیز می‌دهند و آن‌ها را به مواد محلول در آب تبدیل می‌کنند. مواد محلول ایجاد شده طی این فرایند، از محل لکه شسته خواهند شد.

۴) در واکنش مورد نظر، دو عنصر فلزی **سدیم** و **آلومینیم** شرکت می‌کنند. این دو عنصر فلزی، متعلق به تناوب سوم جدول دوره‌ای هستند.

ماز

۷۹- کدام‌یک از مطالب زیر نادرست است؟

۱) اسیدها با اغلب عناصر فلزی واکنش داده و در تماس با پوست، به آن آسیب می‌رسانند.
۲) اغلب میوه‌ها از جمله کیوی، دارای اسید بوده و مقدار pH یک نمونه از آن‌ها بزرگ‌تر از ۷ است.
۳) اسید معده، آنزیم‌های گوارشی را فعال کرده و در ساختار خود، حاوی اتمی از خانواده هالوژن‌ها است.
۴) آرنیوس، برای نخستین بار، رفتار اسیدها و بازها را با کار کردن روی رسانایی محلول‌های آبی به‌صورت علمی توجیه کرد.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۲۰۱)

اغلب میوه‌ها، به‌خصوص میوه‌های ترش‌مزه مانند انگور، سیب ترش، مرکبات و کیوی، دارای اسیدهای خوراکی هستند؛ بنابراین pH آن‌ها **کمتر از ۷** است. اسیدهای موجود در این نوع از میوه‌ها، متعلق به خانواده **کربوکسیلیک اسیدها** هستند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) اسیدها با اغلب فلزها واکنش می‌دهند و در تماس با پوست، احساس سوزش ایجاد می‌کنند. برای نمونه دلیل سوزش معده که درد شدیدی در ناحیه سینه ایجاد می‌کند، برگشت مقداری از محتویات اسیدی معده به لوله مری است. در نقطهٔ مقابل، بازها در سطح پوست همانند صابون، احساس لیزی ایجاد می‌کنند و می‌توانند به آن آسیب هم برسانند.

۳) با ورود غذا به معده انسان، غدد موجود در دیواره معده برای از بین بردن میکروب‌های موجود در غذاها و فعال‌کردن آنزیم‌های گوارشی، شروع به ترشح هیدروکلریک اسید با فرمول شیمیایی HCl می‌کنند. هیدروکلریک اسید، حاوی اتم کلر بوده و کلر نیز نوعی هالوژن (عنصری از گروه ۱۷ جدول تناوبی) است. توجه داریم که در بدن انسان بالغ، روزانه بین ۲ تا ۳ لیتر شیره معده تولید می‌شود.

۴) سوانت آرنیوس، نخستین کسی بود که اسیدها و بازها را بر یک مبنای علمی توصیف کرد. آرنیوس با تحقیق بر روی رسانایی الکتریکی محلول‌های آبی (نه محلول‌هایی با حلال‌های آلی) توانست یک مبنای علمی برای توصیف اسیدها و بازها ارائه کند. توجه داریم که محلول‌های آلی اغلب رسانایی الکتریکی ندارند و بر اساس مدل آرنیوس، نمی‌توان درباره آن‌ها اظهار نظر کرد.

نظریه آرنیوس

آرنیوس نخستین کسی بود که اسیدها و بازها را بر یک مبنای علمی توصیف کرد. او بر روی رسانایی الکتریکی محلول‌های آبی کار می‌کرد. یافته‌های تجربی آرنیوس نشان داد که محلول اسیدها و بازها رسانای برق هستند، اما میزان رسانایی الکتریکی آن‌ها با یکدیگر یکسان نبوده و هر محلول، رسانایی الکتریکی متفاوتی با سایر محلول‌ها دارد. البته، توجه داریم که شواهد تاریخی نشان می‌دهند پیش از آنکه ساختار اسیدها و بازها شناخته شود، شیمی‌دان‌ها افزون بر ویژگی‌های اسیدها و بازها، با برخی از واکنش‌های آن‌ها نیز آشنا بودند. طبق مدل آرنیوس، بازها در آب یون هیدروکسید آزاد می‌کنند و اسیدها نیز در آب، یون هیدرونیوم آزاد می‌کنند.

۸۰- در ساختار یک پاک‌کنندهٔ غیرصابونی با زنجیر هیدروکربنی سیرشده، ۱۳ اتم کربن وجود دارد که فقط به ۲ اتم هیدروژن متصل شده‌اند. درصد جرمی گوگرد در این پاک‌کننده به‌تقریب کدام است؟

$(S = ۳۲ , Na = ۲۳ , O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۸/۵۱ ۲) ۱۷/۰۲ ۳) ۶/۳۶ ۴) ۱۲/۷۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۱ ـ ۱۲۰۱)

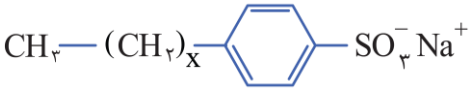
فرمول کلی پاک‌کننده‌های غیرصابونی، به‌صورت زیر است:

$$R - C_۶H_۴ - SO_۳Na$$

اگر زنجیرهٔ هیدروکربنی در این ماده سیرشده باشد، این فرمول به‌صورت زیر خواهد بود:

$$C_nH_{۲n+۱} - C_۶H_۴ - SO_۳Na$$

ساختار باز شده پاک‌کننده مورد نظر به‌صورت زیر است:



در ساختار بالا، تعداد x اتم کربن وجود دارد که هرکدام از آن‌ها به ۲ اتم هیدروژن متصل شده‌اند. این در حالی است که سایر اتم‌های کربن، به ۳، ۱ و یا صفر اتم هیدروژن متصل شده‌اند. طبق فرض سؤال، در ساختار پاک‌کنندهٔ غیرصابونی مورد نظر، ۱۳ اتم کربن وجود دارد که فقط به ۲ اتم هیدروژن متصل شده‌اند. بر این اساس، داریم:

$$x = ۱۳ \Longrightarrow \text{فرمول پاک‌کننده}: CH_۳ - (CH_۲)_{۱۳} - C_۶H_۴ - SO_۳^- Na^+$$

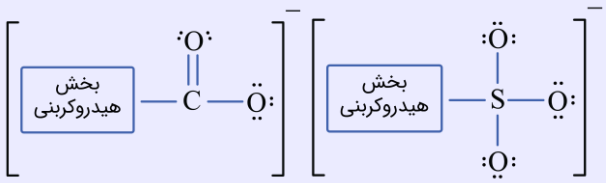
پس فرمول این پاک‌کننده به‌صورت $C_{۱۴}H_{۲۹}C_۶H_۴SO_۳Na$ یا $C_{۲۰}H_{۳۳}SO_۳Na$ خواهد بود. در ساختار هر واحد فرمولی از این ماده، فقط یک اتم گوگرد وجود دارد. بر این اساس، درصد جرمی اتم‌های گوگرد در آن برابر است با:

$$\text{درصد جرمی اتم‌های گوگرد} = \frac{\text{جرم اتم } S}{\text{جرم مولی پاک‌کننده}} \times ۱۰۰ = \frac{۳۲ \times ۱۰۰}{(۲۰ \times ۱۲) + (۳۳ \times ۱) + (۱ \times ۳۲) + (۳ \times ۱۶) + ۲۳} \simeq \text{درصد } ۸/۵۱$$

همان‌طور که مشخص است، درصد جرمی گوگرد در ماده مورد نظر برابر با ۸/۵۱ درصد می‌شود.

ساختار پاک‌کننده‌ها

تصویر زیر، ساختار بخش باردار از قسمت آنیونی پاک‌کننده‌های صابونی و غیرصابونی را نشان می‌دهد:



همان‌طور که مشخص است، اتم‌های اکسیژن موجود در این پاک‌کننده‌ها، تنها اتم‌هایی از آن‌ها هستند که جفت الکترون ناپیوندی دارند.

۸۱- عنصر فرضی رودیم در یک نمونه از خود دارای دو ایزوتوپ با نمادهای $^{۹۴}_{۴۵}Rh$ و $^{۹۷}_{۴۵}Rh$ است. اگر در یک نمونه طبیعی از آن که حاوی ۱۵۰ اتم می‌شود، مجموعاً ۷۴۸۵ نوترون وجود داشته باشد، یک نمونه ۸ مولی از این عنصر چند گرم جرم خواهد داشت؟ (عدد جرمی را به‌تقریب برابر جرم مولی در نظر بگیرید.)

۱) ۳۷۹/۶ ۲) ۷۹۸/۴ ۳) ۳۹۹/۲ ۴) ۷۵۹/۲

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۱۹ ـ ۱۰۰۱)

برای حل این سؤال، باید مراحل زیر را طی کنیم:

۱) فراوانی هر ایزوتوپ را در نمونه مورد نظر پیدا کنیم

۲) جرم اتمی میانگین عنصر مورد نظر را محاسبه کنیم

۳) جرم ۸ مول از این عنصر را به‌دست بیاوریم

فرض می‌کنیم در این نمونه، x اتم $^{۹۴}_{۴۵}A$ به همراه y اتم $^{۹۷}_{۴۵}A$ حضور دارد. پس می‌توان گفت در این نمونه مجموعاً $x + y$ اتم یافت می‌شود. از طرفی هر ایزوتوپ $^{۹۴}_{۴۵}A$ و $^{۹۷}_{۴۵}A$ به‌ترتیب دارای ۴۹ و ۵۲ نوترون در هسته خود است. پس می‌توان گفت در این نمونه مجموعاً $۴۹x + ۵۲y$ نوترون در هسته اتم‌ها یافت می‌شود. بر این اساس، داریم:

$$\begin{cases} x + y = ۱۵۰ \\ ۴۹x + ۵۲y = ۷۴۸۵ \end{cases} \Rightarrow x = ۱۰۵ \quad \text{و} \quad y = ۴۵$$

بر این اساس، جرم اتمی میانگین این عنصر را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{جرم اتمی میانگین} = \frac{(\text{جرم ایزوتوپ دوم} \times \text{فراوانی ایزوتوپ دوم}) + (\text{جرم ایزوتوپ اول} \times \text{فراوانی ایزوتوپ اول})}{\text{مجموع فراوانی}}$$

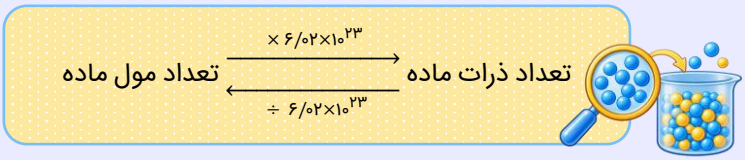
$$= \frac{(۱۰۵ \times ۹۴) + (۴۵ \times ۹۷)}{۱۵۰} = ۹۴/۹\ amu \Longrightarrow \text{جرم مولی } Rh = ۹۴/۹\ g.mol^{-۱}$$

با توجه به محاسبات بالا، جرم ۸ مول از ماده مورد نظر را محاسبه می‌کنیم:

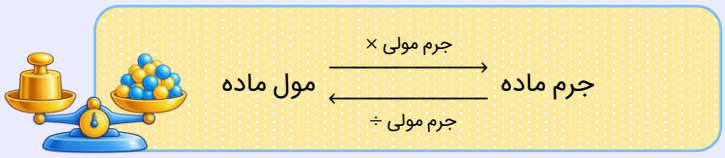
$$?\ g\ Rh = ۸\ mol\ Rh \times \frac{۹۴/۹\ g\ Rh}{۱\ mol\ Rh} = ۷۵۹/۲\ g$$

مفهوم مول

اتم‌ها و مولکول‌ها بسیار کوچک هستند به‌طوری‌که با یک ترازوی عادی، نمی‌توانیم جرم آن‌ها را اندازه‌گیری کنیم. بر این اساس، شیمی‌دان‌ها مفهوم مول را معرفی کردند. هر مول از یک گونه، معادل با $۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}$ ذره از آن گونه است. برای تبدیل مقدار مول یک ماده به تعداد ذرات آن ماده، داریم:



کلید انجام همه محاسبات عددی در علم شیمی، مول است. در واقع، مول مثل یکای پول رایج در دنیای شیمی است. توجه داریم که به جرم یک مول از هر ماده در مقیاس گرم، جرم مولی گفته می‌شود. برای مثال، جرم یک نمونه از فلز منیزیم که شامل $۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}$ اتم منیزیم (یک مول) می‌شود، برابر با ۲۴ گرم است؛ پس می‌توان گفت جرم مولی منیزیم برابر با ۲۴ گرم بر مول ($g.mol^{-۱}$) است. در رابطه با جرم مولی هر ماده، داریم:



۸۲- در رابطه با ایزوتوپ‌های هیدروژن، کدام مطلب زیر درست است؟

۱) پایدارترین رادیوایزوتوپ این عنصر، در ساختار هسته خود دارای ۳ نوترون است.
۲) در یکی از ایزوتوپ‌های ساختگی این عنصر، فقط ۲ نوع ذره زیراتمی وجود دارد.
۳) این عنصر نافلزی، در یک نمونه طبیعی از خود دارای ۲ ایزوتوپ مختلف است.
۴) نیم‌عمر همه رادیوایزوتوپ‌های ساختگی این عنصر، کمتر از یک ثانیه است.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی و خط‌به‌خط ـ سریع ـ صفحهٔ ۶ ـ ۱۰۰۱)

تصویر زیر، نمایی از ایزوتوپ‌های هیدروژن را نشان می‌دهد:

ایزوتوپ‌های هیدروژن

$^{۱}_{۱}H$	$^{۲}_{۱}H$	$^{۳}_{۱}H$	$^{۴}_{۱}H$	$^{۵}_{۱}H$	$^{۶}_{۱}H$	$^{۷}_{۱}H$
نیم‌عمر	نیم‌عمر	نیم‌عمر	نیم‌عمر	نیم‌عمر	نیم‌عمر	نیم‌عمر
پایدار	پایدار	۱۲/۳۲ سال	$۱/۴ \times ۱۰^{-۲۲}$ ثانیه	$۹/۱ \times ۱۰^{-۲۲}$ ثانیه	$۲/۹ \times ۱۰^{-۲۲}$ ثانیه	$۲/۳ \times ۱۰^{-۲۳}$ ثانیه
فراوانی در طبیعت	فراوانی در طبیعت	فراوانی در طبیعت	فراوانی در طبیعت	فراوانی در طبیعت	فراوانی در طبیعت	فراوانی در طبیعت
۹۹/۹۸۸۵ (طبیعی)	۰/۰۱۱۴ (طبیعی)	ناچیز (طبیعی)	۰ (ساختگی)	۰ (ساختگی)	۰ (ساختگی)	۰ (ساختگی)

سه ایزوتوپ اول هیدروژن در یک نمونه **طبیعی** از این عنصر یافت شده و چهار ایزوتوپ بعدی، به‌صورت **ساختگی** تهیه شده‌اند. از بین سه ایزوتوپ طبیعی هیدروژن، دو ایزوتوپ اول **کاملاً پایدار** بوده و ایزوتوپ سوم (ایزوتوپ $^{۳}_{۱}H$ که در ساختار هسته خود **۲ نوترون** و **۱ پروتون** دارد)، **ناپایدار** است. توجه داریم که نیم‌عمر همه رادیوایزوتوپ‌های ساختگی این عنصر، **کمتر از یک ثانیه** است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) رادیوایزوتوپ، معادل با ایزوتوپ ناپایدار یک عنصر است. مقدار پایداری رادیوایزوتوپ‌ها، با نیم‌عمر آن‌ها رابطه مستقیم دارد. پایدارترین رادیوایزوتوپ هیدروژن، معادل با $^{۳}_{۱}H$ است و این ایزوتوپ نیز در ساختار هسته خود دارای ۲ نوترون است.

۲) در ایزوتوپ‌های ساختگی عنصر هیدروژن، هر سه ذره زیراتمی یعنی پروتون، نوترون و الکترون وجود دارد. تنها در ایزوتوپ $^{۱}_{۱}H$ فقط ۲ نوع ذره زیراتمی وجود دارد.

۳) هیدروژن، یک عنصر **نافلزی** است. این عنصر در یک نمونه طبیعی از خود دارای ۳ ایزوتوپ مختلف است.

رادیوایزوتوپ‌ها

رادیوایزوتوپ‌ها، معادل با ایزوتوپ‌های پرتوزای یک عنصر هستند. رادیوایزوتوپ‌ها اگرچه بسیار خطرناک هستند، اما پیشرفت دانش و فناوری، بشر را موفق به مهار و بهره‌گیری از آن‌ها کرده است؛ به‌طوری‌که از آن‌ها در پزشکی، کشاورزی و سوخت در نیروگاه‌های اتمی استفاده می‌شود. تکنسیم ($^{99}_{43}Tc$) نخستین عنصری است که در واکنشگاه (راکتور) هسته‌ای تولید شده است. تکنسیم متعلق به دسته d از تناوب پنجم جدول دوره‌ای بوده و یک عنصر فلزی است. از این عنصر در تصویربرداری غدهٔ تیروئید انسان استفاده می‌شود. از آنجا که نیم‌عمر این عنصر کم است و نمی‌توان مقادیر زیادی از آن را تهیه و برای مدت طولانی نگهداری کرد، بسته به نیاز، آن را با یک مولد هسته‌ای تولید و سپس مصرف می‌کنند. در واقع، همهٔ تکنسیم موجود در جهان باید به‌طور مصنوعی و با استفاده از واکنش‌های هسته‌ای ساخته شود.

مای

۸۳- کدام موارد از عبارت‌های زیر درست هستند؟

الف ـ فضاپیماهای وویجر مأموریت داشتند ترکیب‌های شیمیایی در اتمسفر مشتری و ترکیب درصد این مواد را تهیه کنند.

ب ـ شیمی‌دان‌ها با مطالعه خواص و رفتار مواد، به دنبال پی بردن به چگونگی روند تشکیل ذرات سازنده جهان هستند.

ج ـ زمین، حاوی عناصر فلزی مثل آهن و نیکل بوده و پس از مشتری، دومین سیاره بزرگ سامانه خورشیدی است.

د ـ طی مهبانگ، انرژی عظیمی مصرف شده و ذره‌های زیراتمی مانند الکترون، نوترون و پروتون به وجود آمدند.

۱) «الف» و «ب» ۲) «ب» و «ج» ۳) «ج» و «د» ۴) «الف» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی و خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴ ـ ۱۰۰۱)

عبارت‌های (الف) و (ب) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) دو فضاپیمای وویجر، مأموریت داشتند با گذر از کنار سیاره‌های مشتری، زحل، اورانوس و نپتون، شناسنامهٔ فیزیکی و شیمیایی آن‌ها را تهیه کرده و ارسال کنند. این شناسنامه‌ها، حاوی اطلاعاتی مانند نوع عنصرهای سازنده، ترکیب‌های شیمیایی در اتمسفر سیاره‌ها و ترکیب درصد این مواد بوده است. توجه داریم که در زمان حال حاضر، **فضاپیمای وویجر ۱** از سامانه خورشیدی خارج شده است.

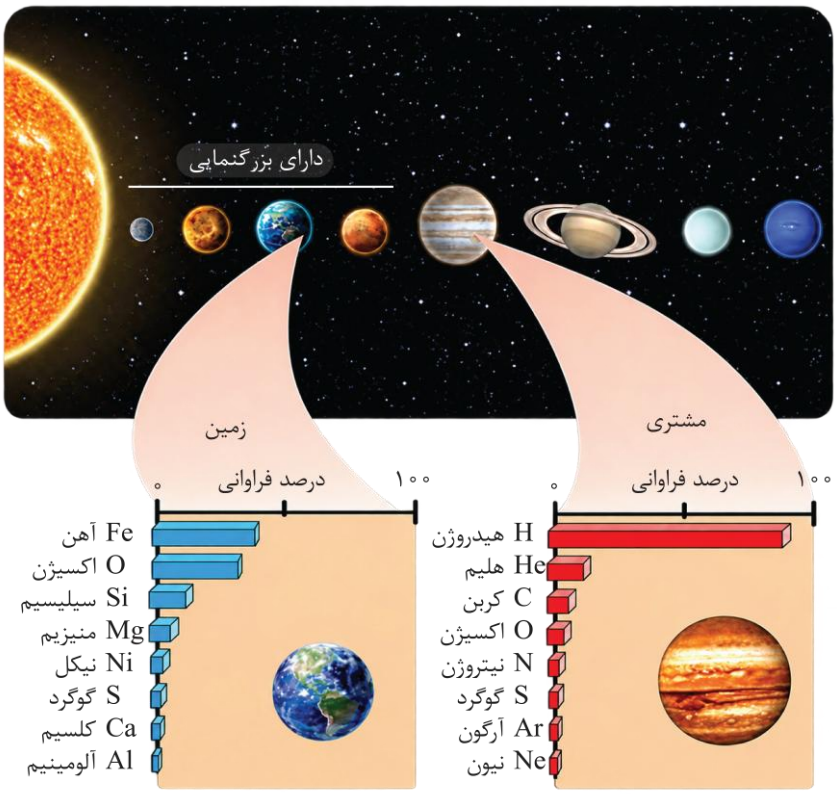
سفر وویجر

شواهد تاریخی حاصل از سنگ‌نبشته‌ها و نقاشی‌های دیوار غارها، نشان می‌دهد که انسان اولیه با نگاه به آسمان و ستاره‌ها، در پی فهم نظام و قانونمندی در آسمان بوده است. برای مثال، سفر دو فضاپیمای وویجر ۱ و ۲ در سال ۱۹۷۷ میلادی (۱۳۵۶ خورشیدی) برای شناخت بیشتر سامانه خورشیدی، نمونه‌ای از تلاش دانشمندان برای شناخت کیهان است. فضاپیماهای وویجر مأموریت داشتند با گذر از کنار سیاره‌های خارجی‌تر از زمین (مشتری، زحل، اورانوس و نپتون)، شناسنامه فیزیکی و شیمیایی آن‌ها را تهیه کرده و بفرستند. این شناسنامه‌ها حاوی اطلاعاتی مانند نوع عناصر سازنده، ترکیب‌های شیمیایی در اتمسفر سیاره‌ها و ترکیب درصد این مواد بوده است. فضاپیمای وویجر ۱ در حال حاضر از سامانه خورشیدی خارج شده و آخرین عکس از کره زمین را از فاصله تقریبی ۷ میلیارد کیلومتری، ارسال کرده است.

ب) بشر همواره با سؤالات مختلفی از جمله اینکه «**جهان هستی چگونه پدید آمده است؟**»، «**ذره‌های سازندهٔ جهان هستی طی چه فرایندی و چگونه به وجود آمده‌اند؟**» و ... مواجه بوده است. پرسش‌هایی که یافتن پاسخ آن‌ها بسیار دشوار است. زمین در برابر عظمت آفرینش، همانند آزمایشگاه بسیار کوچکی است که دانشمندان با آزمایش‌های گوناگون در آن، در تلاش برای یافتن پاسخ این پرسش‌ها هستند. شیمی‌دان‌ها با مطالعهٔ خواص و رفتار ماده و همچنین برهم‌کنش نور با ماده، در این راستا سهم بسزایی داشته‌اند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ج) سیاره زمین، حاوی عناصر فلزی مثل روی، آهن و نیکل است. علاوه بر فلزها، در ساختار زمین عناصر نافلزی و شبه‌فلزی نیز یافت می‌شوند. توجه داریم که پس از سیاره مشتری، زحل دومین سیاره بزرگ سامانه خورشیدی است. تصویر زیر نمایی از سیاره‌های موجود در سامانه خورشیدی را نشان می‌دهد:



توجه داریم که در تصویر فوق، چهار سیاره داخلی دارای بزرگ‌نمایی بوده و اندازه آن‌ها نسبت به واقعیت کمی بزرگ‌تر نشان داده شده است.

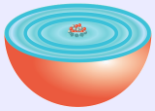
د) بر طبق باور برخی از دانشمندان، سرآغاز کیهان با انفجاری مهیب (مهبانگ) همراه بوده که طی آن انرژی عظیمی آزاد شده است. در آن شرایط پس از پدید آمدن ذره‌های زیر اتمی مانند الکترون، نوترون و پروتون، عنصرهای هیدروژن و هلیم پا به عرصهٔ جهان گذاشتند.

روند تولید عناصر

عنصرها به‌صورت ناهمگون در جهان هستی توزیع شده‌اند. این یافته‌ها باعث شد تا دانشمندان بتوانند چگونگی پیدایش عنصرها را توضیح دهند. برخی از دانشمندان بر این باور هستند که سرآغاز کیهان با انفجاری مهیب به نام مهبانگ یا همان بیگ‌بنگ (*big bang*) همراه بوده است. طی مهبانگ، انرژی عظیمی آزاد شده است. در آن شرایط، ابتدا ذره‌های زیراتمی مانند الکترون، پروتون و نوترون پدید آمدند. اطلاعات این ذرات، در جدول زیر آمده است:

نام ذره	نماد	بار الکتریکی نسبی
الکترون	${}^{0}_{-1}e$	−۱
پروتون	${}^{1}_{+1}p$	+۱
نوترون	${}^{1}_{0}n$	۰

پس از ایجاد ذرات زیراتمی، با کنار هم قرار گرفتن الکترون‌ها، نوترون‌ها و پروتون‌ها، ساده‌ترین عناصر یعنی عنصرهای هیدروژن و هلیم تولید شدند. تصویر زیر، ساختار یک اتم را نشان می‌دهد:



روند پیدایش عناصر هیدروژن و هلیم را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

مهبانگ → ذرات زیراتمی → هیدروژن → هلیم

۸۴- در یون $A^{۳+}$، اختلاف تعداد نوترون‌ها و الکترون‌ها برابر ۷ است. اگر بین عنصر A و سومین عنصر فراوان‌تر موجود در ساختار سیاره مشتری، ۱۹ عنصر در جدول دوره‌ای وجود داشته باشد، عدد جرمی عنصر A کدام است؟

۱) ۴۲ ۲) ۴۸ ۳) ۵۲ ۴) ۵۶

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵ ـ ۱۰۰۱)

برای محاسبه تعداد عناصری که بین دو عنصر با اعداد اتمی m و n قرار می‌گیرند، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{تعداد عناصر} = |m-n|-۱$$

طبق فرض سؤال، بین عنصر A و سومین عنصر فراوان‌تر موجود در ساختار سیاره مشتری (کربن)، ۱۹ عنصر در جدول دوره‌ای وجود دارد. بنابراین، عدد اتمی عنصر A برابر با $Z = ۶ + ۱۹ + ۱ = ۲۶$ خواهد بود. یون مورد نظر، دارای بار الکتریکی ۳+ بوده و اختلاف تعداد نوترون‌ها و الکترون‌ها در آن برابر ۷ است. عدد اتمی این عنصر را معادل با Z در نظر گرفته و می‌دانیم که این عدد، تعداد پروتون‌های موجود در هسته اتم را نشان می‌دهد. با توجه به داده‌های صورت سؤال، معادله‌های مربوطه را می‌نویسیم:

$$(۱)\ \ n-e=۷ \quad , \quad (۲)\ \ e=Z-۳$$

با توجه به معادله‌های (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$e = Z-۳ = ۲۶-۳ = ۲۳ \xrightarrow{(۱)} n-۲۳ = ۷ \rightarrow n = ۳۰$$

همان‌طور که می‌دانیم، عدد جرمی از رابطه $A = n + Z$ به‌دست می‌آید. بر این اساس، داریم:

$$\text{عدد جرمی} = n + Z = ۳۰ + ۲۶ = ۵۶$$

۸۵- کدام‌یک از مطالب زیر درست است؟

۱) مجموع تعداد ذرات زیراتمی باردار در فراوان‌ترین ایزوتوپ طبیعی منیزیم، برابر با تعداد نوترون‌ها در این ایزوتوپ است.
۲) توده‌های سرطانی، رشد سریع داشته و برخلاف سلول‌های سالم بدن، می‌توانند ذرات گلوکز پرتوزا را جذب کنند.
۳) تیروئید، در قسمت جلوی گردن قرار داشته و در صورت بیماری، همواره مقدار جذب ید توسط آن افزایش می‌یابد.
۴) در روند تشکیل عنصرها، اولین فلز فراوان موجود در سیاره زمین بعد از اولین نافلز فراوان زمین به وجود آمده است.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۹ ـ ۱۰۰۱)

در روند تشکیل عنصرها، عنصرهای سبک‌تر زودتر از عنصرهای سنگین‌تر به وجود آمده‌اند. اولین فلز و اولین نافلز فراوان موجود در سیاره زمین، به ترتیب معادل با آهن و اکسیژن هستند و از آن‌جا که اکسیژن در مقایسه با آهن یک عنصر سبک‌تر به شمار می‌رود، بنابراین زودتر از آهن به وجود آمده است. روند تشکیل عنصرها به‌صورت زیر است:

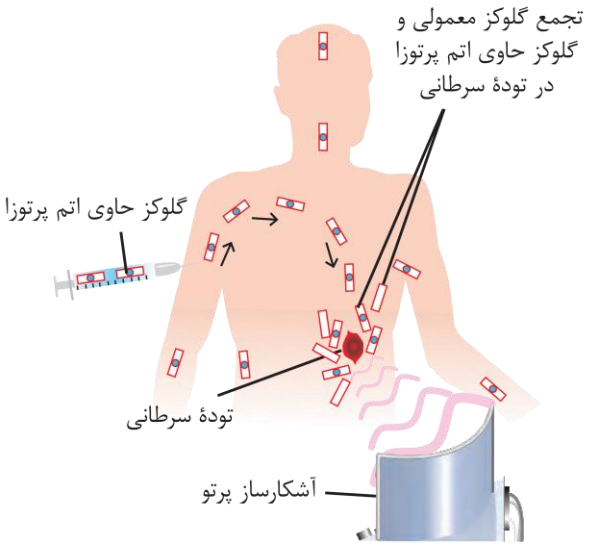
عناصر سنگین‌تر مثل آهن و طلا ← عناصر سبک مثل لیتیم و کربن ← هلیم ← هیدروژن

بررسی سایر موارد:

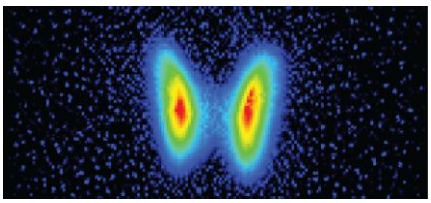
۱) منیزیم دارای ۳ ایزوتوپ $^{۲۴}_{۱۲}Mg$، $^{۲۵}_{۱۲}Mg$ و $^{۲۶}_{۱۲}Mg$ است. از بین این ایزوتوپ‌ها، ایزوتوپ $^{۲۴}_{۱۲}Mg$ دارای بالاترین درصد فراوانی در نمونه‌های طبیعی است. در ساختار این ایزوتوپ، مجموعاً **۲۴ ذره زیراتمی باردار** (الکترون و پروتون) و **۱۲ ذره زیراتمی بدون بار** وجود دارد.

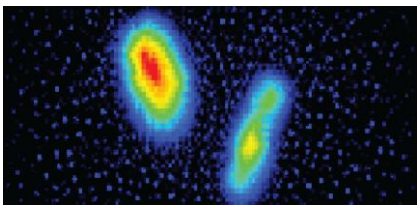
۲) می‌دانیم که به گلوکز حاوی اتم پرتوزا، گلوکز نشان‌دار می‌گویند. توده‌های سرطانی، یاخته‌هایی هستند که رشد غیرعادی و سریع‌تری دارند و از رادیوایزوتوپ‌ها برای تشخیص آن‌ها استفاده می‌شود. توده سرطانی، گلوکز معمولی و گلوکز نشان‌دار را با احتمال یکسان جذب می‌کند. این توده‌ها، مولکول‌های گلوکز معمولی و نشان‌دار را در مقایسه با سایر سلول‌های بدن با سرعت بیشتری جذب می‌کنند.

تصویر زیر، فرایند تشخیص موقعیت این توده‌های غیرطبیعی در بدن را نشان می‌دهد:



۳ غده تیروئید، در جلوی گردن قرار داشته و از دو قسمت تشکیل شده که توسط یک قسمت میانی به هم متصل شده‌اند. در صورت بیماری، این غده اغلب کم‌کار شده و گاهی مقدار جذب ید توسط آن کاهش می‌یابد. بر این اساس، اگر ماده رادیواکتیو حاوی تکنسیم را به بیمار مورد نظر تزریق کنیم، غده تیروئید بیمار، ماده رادیواکتیو را نیز به مقدار کمتری جذب کرده و وجود بیماری در غده تیروئید تأیید می‌شود. تصویر زیر نمایی از اسکن تیروئید را نشان می‌دهد:


تصویر غدهٔ تیروئید سالم


تصویر غدهٔ تیروئید ناسالم

تکنسیم

تکنسیم با نماد $^{99}_{43}Tc$، نخستین عنصری بود که در واکنشگاه (راکتور) هسته‌ای ساخته شد. این رادیوایزوتوپ در تصویربرداری پزشکی کاربرد ویژه‌ای دارد. این عنصر مصنوعی بوده و همه اتم‌های تکنسیم موجود در جهان باید به‌طور مصنوعی و با استفاده از واکنش‌های هسته‌ای ساخته شود. از آنجا که نیم‌عمر این عنصر کم است و نمی‌توان مقادیر زیادی از این عنصر را تهیه و برای مدت طولانی نگهداری کرد، بسته به نیاز، آن را با یک مولد هسته‌ای تولید و سپس مصرف می‌کنند. چون یونی که حاوی اتم‌های تکنسیم است با یون یدید اندازه برابری دارد، غده تیروئید هنگام جذب یون یدید، این یون را نیز جذب می‌کند. با افزایش مقدار این یون در غده پروانه‌ای شکل تیروئید، امکان تصویربرداری از این غده فراهم می‌شود.

ماز

۸۶- کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

۱) تکنسیم یک عنصر رادیواکتیو بوده و در آن نسبت میان شمار نوترون‌ها به پروتون‌ها بیشتر از ۱/۵ است.
۲) اورانیم، یک فلز پرتوزا محسوب شده و شماره تناوب آن در جدول دوره‌ای، ۲ برابر شماره تناوب فسفر است.
۳) شمار کل عناصر موجود در جدول دوره‌ای امروزی، بیش از ۴ برابر شمار عناصر ساختگی موجود در آن است.
۴) پسماند حاصل از راکتورهای اتمی، باید دفن شده و برخلاف مواد مصرف شده در راکتورها، خاصیت پرتوزایی ندارند.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی و خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۰۰۱)

در جدول تناوبی امروزی، **۱۱۸ عنصر** در ساختار **۷ تناوب** و **۱۸ گروه** قرار گرفته‌اند. از ۱۱۸ عنصر موجود در جدول دوره‌ای امروزی، ۹۲ عنصر به‌صورت طبیعی وجود داشته و ۲۶ عنصر به‌صورت ساختگی تولید شده‌اند. بر این اساس، می‌توان گفت شمار کل عناصر موجود در جدول دوره‌ای امروزی، بیش از **۴ برابر شمار عناصر ساختگی** موجود در آن است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) تکنسیم ($^{99}_{43}Tc$) یک عنصر فلزی رادیواکتیو است که به مرور زمان واپاشی کرده و به عناصر ساده‌تر از خود تبدیل می‌شود. با توجه به نماد نوشته شده، در هر اتم تکنسیم ۴۳ پروتون، ۴۳ الکترون و ۵۶ نوترون وجود دارد؛ پس می‌توان گفت در هر اتم تکنسیم نسبت میان شمار نوترون‌ها به پروتون‌ها از ۱/۵ **کمتر** است.

۲) اورانیم شناخته‌شده‌ترین فلز پرتوزایی است که یکی از ایزوتوپ‌های آن، اغلب به‌عنوان سوخت در راکتورهای اتمی استفاده می‌شود. این ایزوتوپ اورانیم، معادل با $^{235}_{92}U$ است. با توجه به عدد اتمی **اورانیم** که برابر با **۹۲** است، این عنصر در تناوب **هفتم** قرار می‌گیرد. این در حالی است که عنصر **فسفر** با عدد اتمی ۱۵، متعلق به **تناوب سوم** است.

اورانیم

رادیوایزوتوپ‌ها (ایزوتوپ‌هایی که خاصیت پرتوزایی دارند) کاربردهای بسیار متنوعی دارند. از رادیوایزوتوپ‌ها در موارد زیر استفاده می‌شود:



اورانیم، شناخته‌شده‌ترین فلز پرتوزایی است که یکی از ایزوتوپ‌های آن با عدد جرمی ۲۳۵، اغلب به‌عنوان سوخت در راکتورهای اتمی به کار می‌رود. این ایزوتوپ با نماد $^{235}_{92}U$ نشان داده می‌شود. فراوانی این ایزوتوپ در مخلوط‌های طبیعی اورانیم کمتر از ۰/۷ درصد است. به فرایندی که موجب افزایش غلظت این ایزوتوپ پرتوزا در مخلوط می‌شود، غنی‌سازی ایزوتوپی گفته می‌شود. این فرایند، یکی از مراحل مهم چرخه تولید سوخت هسته‌ای است. توجه داریم که رادیوایزوتوپ $^{235}_{92}U$ در طبیعت یافت می‌شود.

پیدا کردن شماره تناوب عناصر

طبقه‌بندی کردن، یک مهارت پایه‌ای در یادگیری مفاهیم علمی بوده و بررسی و تحلیل داده‌ها را آسان‌تر می‌کند. با استفاده از طبقه‌بندی، یافته‌ها و داده‌ها به شیوه مناسب سازمان‌دهی شده و بر این اساس، می‌توان سریع‌تر و آسان‌تر به اطلاعات دسترسی یافت. یکی از اهداف طبقه‌بندی کردن عناصر در جدول دوره‌ای، پیش‌بینی خواص شیمیایی عناصر بر اساس موقعیت آن‌ها است. گازهای نجیب، در آخرین خانه هر تناوب قرار گرفته‌اند. برای پیدا کردن شماره تناوب هر عنصر، باید عدد اتمی آن عنصر را با عدد اتمی گازهای نجیب مقایسه کنیم.

۴) از آنجا که در پسماند راکتورهای اتمی هنوز مواد پرتوزا وجود دارند، این پسماند هنوز خاصیت پرتوزایی داشته و خطرناک است. به همین خاطر، دفع پسماند حاصل از راکتورهای اتمی، از جمله چالش‌های صنایع هسته‌ای به شمار می‌رود.

ماز

۸۷- در یک نمونه از فلز لیتیم که از ایزوتوپ‌های طبیعی این عنصر ساخته شده است، به ازای هر اتم از ایزوتوپ سبک‌تر، ۹ اتم از ایزوتوپ سنگین‌تر وجود دارد. جرم یک نمونه از لیتیم فلوئورید (LiF) که شامل مجموعاً $۲/۴۰۸ \times ۱۰^{۲۳}$ یون می‌شود، برابر با چند گرم می‌شود؟ ($F = ۱۹\ g.mol^{-۱}$)

۱) ۱۰/۰۴ ۲) ۵/۰۲ ۳) ۱۰/۳۶ ۴) ۵/۱۸

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۱۹ ـ ۱۰۰۱)

برای حل این سؤال، باید مراحل زیر را طی کنیم:

۱) محاسبه جرم اتمی میانگین فلز لیتیم

۲) به‌دست آوردن جرم نمونه لیتیم فلوئورید با توجه به تعداد اتم موجود در آن

تصویر زیر، نمایی از ایزوتوپ‌های موجود در یک نمونه طبیعی لیتیم را نشان می‌دهد:



اگر در یک نمونه لیتیم، به ازای هر اتم از ایزوتوپ سبک‌تر، ۹ اتم از ایزوتوپ سنگین‌تر وجود داشته باشد، می‌توان گفت درصد فراوانی ایزوتوپ‌های $^{۷}_{۳}Li$ و $^{۶}_{۳}Li$ در نمونه مورد نظر به ترتیب برابر با ۹۰ و ۱۰ درصد می‌شود. بر این اساس، جرم اتمی میانگین لیتیم را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{جرم اتمی میانگین} = \frac{(\text{جرم اتمی ایزوتوپ اول} \times \text{درصد فراوانی ایزوتوپ اول}) + (\text{جرم اتمی ایزوتوپ دوم} \times \text{درصد فراوانی ایزوتوپ دوم}) + \cdots}{۱۰۰} =$$

$$\frac{(۱۰ \times ۶) + (۹۰ \times ۷)}{۱۰۰} = ۶/۹\ amu$$

با توجه به جرم اتمی میانگین لیتیم، می‌توان گفت جرم مولی لیتیم فلوئورید برابر با $۶/۹ + ۱۹ = ۲۵/۹$ گرم بر مول است. بر این اساس، جرم یک نمونه از لیتیم فلوئورید (LiF) که $۲/۴۰۸ \times ۱۰^{۲۳}$ یون می‌شود را محاسبه می‌کنیم. توجه داریم که در هر واحد فرمولی از ترکیب مورد نظر، مجموعاً ۲ یون وجود دارد. بر این اساس، داریم:

$$?\ g\ LiF = ۲/۴۰۸ \times ۱۰^{۲۳}\ ion \times \frac{۱\ mol\ ion}{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}\ ion} \times \frac{۱\ mol\ LiF}{۲\ mol\ ion} \times \frac{۲۵/۹\ g\ LiF}{۱\ mol\ LiF} = ۵/۱۸\ g$$

ماز

۸۸- با توجه به عدد اتمی دو عنصر مختلف از جدول تناوبی، کدام ویژگی از این دو عنصر را نمی‌توان با یکدیگر مقایسه کرد؟

۱) شماره گروه دو عنصر در جدول تناوبی
۲) بار الکتریکی یون پایدار حاصل از این دو عنصر
۳) جرم اتمی دو عنصر
۴) شماره تناوب دو عنصر در جدول تناوبی

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۰۰۱)

شیمی‌دان‌ها، **۱۱۸ عنصر** شناخته شده را براساس **افزایش عدد اتمی** و **روند تغییر خواص** آن‌ها، در یک جدول کنار هم قرار داده‌اند. این جدول، به آن‌ها کمک می‌کند تا اطلاعات ارزشمندی از **ویژگی‌های عناصر** را به‌دست آورند و رفتار عنصرهای گوناگون را پیش‌بینی کنند. توجه داریم که هر خانه از جدول دوره‌ای، به یک عنصر معین تعلق دارد و حاوی برخی اطلاعات شیمیایی آن عنصر از جمله نماد شیمیایی، **جرم اتمی میانگین** و **عدد اتمی** است. هر ردیف **افقی** (→) جدول دوره‌ای، نشان‌دهنده چیدمان عنصرها برحسب **افزایش عدد اتمی** بوده و **دوره** نام دارد. نام دیگر دوره، **تناوب** است. هر ستون (↓) از جدول دوره‌ای نیز شامل عنصرهایی با **خواص شیمیایی** (میزان واکنش‌پذیری، نوع و مقدار بار یون تشکیل شده و ...) **مشابه** (نه یکسان!) بوده و **گروه** نامیده می‌شود. با توجه به توضیحات داده شده، خواص شیمیایی عنصرهایی که در یک دوره از جدول جای دارند، **متفاوت** است. با پیمایش هر دوره از چپ به راست، خواص عنصرها به‌طور مشابه تکرار می‌شود؛ از این رو چنین جدولی را **جدول دوره‌ای** یا **جدول تناوبی عنصرها** نامیده‌اند.

با توجه به عدد اتمی دو عنصر مختلف از جدول تناوبی، می‌توان **موقعیت** (شماره گروه و شماره تناوب) **عناصر** را پیدا کرد. همان‌طور که گفتیم، در جدول دوره‌ای امروزی، عنصرها براساس **افزایش** عدد اتمی طبقه‌بندی شده‌اند اما از نظر جرم اتمی، بی‌نظمی‌هایی بین عناصر موجود در جدول وجود دارد. برای مثال، عنصر ید در خانه بعد از **عنصر تلوریم** قرار داشته و عدد اتمی این عنصر بیشتر از تلوریم است، اما جرم اتمی میانگین ید در مقایسه با تلوریم **کمتر** است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) با توجه به عدد اتمی هر عنصر، می‌توان شماره گروه عنصر مورد نظر در جدول تناوبی را پیدا کرد.

پیدا کردن شماره گروه عناصر

برای پیدا کردن شماره گروه هر عنصر نیز باید عدد اتمی آن عنصر را با عدد اتمی گازهای نجیب قبل و بعد از آن مقایسه کنیم. برای این منظور، طبق الگوریتم زیر عمل می‌کنیم:



۲) عناصری از جدول دوره‌ای که در یک گروه قرار می‌گیرند، اغلب یون‌هایی با بار الکتریکی مشابه هم تشکیل می‌دهند. برای مثال، عناصر موجود در گروه دوم جدول تناوبی، به‌طور کلی به فلزهای قلیایی خاکی معروف هستند. به‌جز بریلیم، سایر عناصر موجود در این گروه واکنش‌پذیری بالایی داشته و در واکنش با نافلزها، دو الکترون از دست می‌دهند و یون‌هایی با نماد X^{2+} تشکیل می‌دهند.

۴) با توجه به عدد اتمی هر عنصر، می‌توان شماره تناوب عنصر مورد نظر در جدول تناوبی را پیدا کرد.

ماز

۸۹- کدام‌یک از مطالب زیر نادرست است؟

۱) جرم مولی عنصری که برای ایجاد مقیاس (سنجه) جرم نسبی سایر اتم‌ها به کار می‌رود، برابر با $12amu$ است.
۲) جرم هر اتم فلوئور هنگام تبدیل شدن به یون پایدار فلوئورید، به‌صورت محسوسی دچار تغییر نمی‌شود.
۳) دقت اندازه‌گیری باسکول‌های تنی تا یک صدم تن بوده و دقت ترازوی زرگری نیز تا یک صدم گرم است.
۴) پروتون با نماد شیمیایی $_{1}^{1}p^{+}$ نشان داده شده و جرم هر ذره از آن، کمی بیشتر از $1amu$ است.

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۵ ـ ۱۰۰۱)

اتمی که به‌عنوان مقیاس جرم نسبی سایر اتم‌ها به کار می‌رود، $_{6}^{12}C$ است. این اتم، جرمی معادل با $12amu$ داشته ولی جرم مولی آن (جرم یک مول از آن) برابر با $12g.mol^{-1}$ است. از این موضوع می‌توان نتیجه گرفت که جرم اتمی (جرم یک اتم)، از نظر عددی با جرم مولی (جرم یک مول از آن اتم) برابر است ولی این دو مقدار، یکای متفاوتی دارند. یکای جرم اتمی، amu و یکای جرم مولی $g.mol^{-1}$ است.

یکای جرم اتمی

اتم‌ها خیلی کوچک بوده و جرم آن‌ها را با ترازوی عادی نمی‌توان اندازه‌گیری کرد. در واقع، گرم، کیلوگرم، میلی‌گرم و ...، یکاهای مناسبی برای اندازه‌گیری جرم اتم‌ها نیستند. در این شرایط، دانشمندان مقیاس جرم نسبی را برای تعیین جرم اتم‌ها به کار می‌برند. این مقیاس با نماد amu یا u نشان داده می‌شود. مطابق این مقیاس، جرم اتم‌ها را با وزنه‌ای می‌سنجند که جرم آن معادل با $\frac{۱}{۱۲}$ جرم هر اتم کربن-۱۲ است. در این مقیاس، جرم هر اتم با یکای amu، برابر با جرم اتمی آن اتم (A) بوده و جرم هر مولکول نیز برابر با مجموع جرم اتمی ذرات سازنده آن است. برای مثال، داریم:

$$۱\ atom\ {}^{۱۶}_{۸}O \simeq ۱۶\ amu \qquad ۱\ atom\ {}^{۵۶}_{۲۶}Fe \simeq ۵۶\ amu$$

به‌عنوان مثال دیگر، اگر جرم اتمی اکسیژن و کربن به‌ترتیب برابر با ۱۶ و ۱۲ واحد amu باشد، داریم:

$$۱\ molecule\ CO_۲ \simeq ۴۴\ amu$$

جرم هر الکترون حدوداً برابر با $\frac{۱}{۲۰۰۰}amu$ بوده و جرم هر نوترون یا پروتون برابر با $۱amu$ است، پس می‌توان گفت جرم هر اتم تقریباً برابر با جرم هسته آن اتم خواهد بود. مثلاً داریم:

$$^{۲۴}_{۱۲}Mg \rightarrow ۱۲n + ۱۲p \rightarrow \text{جرم} \simeq ۲۴\ amu$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) الکترون، جرم بسیار ناچیزی داشته و به همین خاطر، با تغییر تعداد الکترون‌ها در یک اتم و تبدیل آن اتم به یون، جرم اتم مورد نظر تغییر زیادی نمی‌کند. برای مثال، اتم فلوئور با گرفتن یک الکترون، به یون فلوئورید تبدیل می‌شود. چون این الکترون جرم بسیار ناچیزی دارد، جرم اتم مورد نظر طی این فرایند تغییر محسوسی نمی‌کند.

۳) جرم یک کامیون را با باسکول و یکای تن، جرم هندوانه را با ترازوی معمولی و یکای کیلوگرم (kg) و جرم طلا را با ترازوهای دقیق‌تر و یکای گرم می‌سنجند. ترازوهایی که برای اندازه‌گیری جرم مواد گوناگون به کار می‌روند، دقت اندازه‌گیری متفاوتی دارند. برای نمونه، دقت باسکول‌های تنی تا ۰/۰۱ تن و دقت ترازوی زرگری تا ۰/۰۱ گرم است.

انتخاب یکای اندازه‌گیری

دانشمندان برای اینکه بتوانند خواص مختلف هر ماده را در محیطی مانند بدن، محیط زیست و محیط آزمایش بررسی کرده و اثر آن را گزارش کنند، باید بدانند که چه جرمی از اتم‌ها یا مولکول‌های آن ماده وارد محیط شده است. جرم اجسام و اشیاء گوناگون را بسته به اندازه و نوع آن‌ها با ترازوهای متفاوتی اندازه‌گیری می‌کنند. برای مثال، جرم یک کامیون یا تریلی را با باسکول و یکای تن، جرم هندوانه را با ترازوی معمولی و یکای کیلوگرم و جرم طلا را با ترازوهای دقیق‌تر و یکای گرم می‌سنجند. ترازوهایی که برای اندازه‌گیری جرم مواد گوناگون به‌کار می‌رود، دقت اندازه‌گیری متفاوتی دارند. برای نمونه، دقت باسکول‌های تنی تا یک صدم تن و دقت ترازوی زرگری تا یک صدم گرم است. بر این اساس، با استفاده از باسکول چند تنی نمی‌توان جرم یک هندوانه را اندازه‌گیری کرد؛ زیرا جرم هندوانه از دقت اندازه‌گیری این ترازو کمتر است.

۴) جدول زیر، اطلاعات مختلف مربوط به انواع ذره‌های زیراتمی را نشان می‌دهد:

نام ذره	نماد	بار الکتریکی نسبی	جرم (amu)	جرم (g)
الکترون	${}^{۰}_{-۱}e$	-۱	۰/۰۰۰۵	$۹/۱۰۹ \times ۱۰^{-۲۸}$
پروتون	${}^{۱}_{+۱}p$	$+۱$	۱/۰۰۷۳	$۱/۶۷۳ \times ۱۰^{-۲۴}$
نوترون	${}^{۱}_{۰}n$	۰	۱/۰۰۸۷	$۱/۶۷۵ \times ۱۰^{-۲۴}$

با توجه به اطلاعات موجود در این جدول، پروتون با نماد ${}^{۱}_{+۱}p$ نشان داده شده و جرم هر ذره از آن در حدود $۱/۰۰۷۳amu$ است. این مقدار، کمی بیشتر از مقدار $۱amu$ است.

۹۰- جرم اولیه یک ماده پرتوزا، برابر با ۹۶ گرم بوده و طی ۳ ساعت، جرم این ماده به اندازه ۹۴/۵ گرم کاهش می‌یابد. نیم‌عمر این ماده، برابر با چند ساعت بوده و پس از پایان این فرایند، به‌تقریب چند ذره از ماده مورد نظر باقی مانده است؟ (جرم مولی ماده رادیواکتیو را برابر با ۱۵۰ گرم بر مول در نظر بگیرید.)

۱) $۳/۰۱ \times ۱۰^{۲۱} - ۰/۶$
۲) $۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۱} - ۰/۶$
۳) $۳/۰۱ \times ۱۰^{۲۱} - ۰/۵$
۴) $۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۱} - ۰/۵$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۶ ـ ۱۰۰۱)

جرم مادهٔ باقیمانده از یک عنصر رادیواکتیو را به کمک رابطه زیر تعیین می‌کنند:

$$\text{مقدار باقی‌مانده} = \text{مقدار اولیه} \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{\Delta t}{T}}$$

در این رابطه، Δt برابر با زمان سپری شده و T برابر با نیم‌عمر عنصر مورد نظر است. جرم ماده اولیه برابر با ۹۶ گرم بوده است و پس از گذشت مدت زمانی خاص، ۹۴/۵ گرم از جرم آن کاسته می‌شود. بر این اساس، می‌توان گفت جرم باقی مانده از ماده مورد نظر برابر با ۱/۵ گرم است. اکنون نیم‌عمر ماده مورد نظر را بر حسب ساعت به‌دست می‌آوریم:

$$۱/۵ = ۹۶ \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{۳}{T}} \Longrightarrow T = ۰/۵\ h$$

بنابراین نیم‌عمر این ماده، برابر با نیم ساعت است. طبق فرض سؤال، فقط ۱/۵ گرم از ماده مورد نظر باقی مانده است. بر این اساس، داریم:

$$?\ \text{ذره} = ۱/۵\ g\ \text{ماده} \times \frac{۱\ mol\ \text{ماده}}{۱۵۰\ g\ \text{ماده}} \times \frac{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}\ \text{ذره}}{۱\ mol\ \text{ماده}} = ۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۱}\ \text{ذره}$$

واپاشی رادیوایزوتوپ‌ها

به‌طور کلی اگر شرط زیر برقرار باشد، اتم ناپایدار بوده و به مرور زمان متلاشی می‌شود:

$$\frac{n}{p} \geq ۱/۵$$

نیم‌عمر هر عنصر یا ماده رادیواکتیو، برابر با بازه زمانی است که در طول آن، مقدار ماده پرتوزا مورد نظر در اثر واپاشی نصف می‌شود. برای مثال، اگر در طول مدت ۵ سال، نیمی از یک ماده رادیواکتیو دچار واپاشی شود، نیم‌عمر این ماده برابر با ۵ سال می‌شود. در این مسائل، مقدار باقی‌مانده از ماده اولیه ($A_۰$) برابر است با:

$$n = \frac{\text{کل زمان}}{\text{بازه‌های زمانی مشخص(نیمه‌عمر)}} = \frac{\Delta t}{T}$$

$$A = (\frac{۱}{۲})^{n} \times A_۰$$

در رابطهٔ فوق، مقدار $A_۰$ معادل با غلظت (یا مقدار) اولیه است و غلظت واکنش‌دهنده با گذشتن هر نیم‌عمر $\frac{۱}{۲}$ برابر می‌شود، پس داریم:

$$\text{مقدار مصرف شده} = A_۰ - \text{مقدار باقی‌مانده}$$

۹۱- کدام موارد از عبارت‌های زیر درست هستند؟

الف ـ تناوب هفتم جدول دوره‌ای، در ساختار خود ۳۲ عنصر جای داده و به عنصری با عدد اتمی ۱۱۶ ختم می‌شود.

ب ـ عدد اتمی سومین عنصر موجود در گروه چهاردهم جدول دوره‌ای، ۲ برابر ششمین عنصر تناوب سوم آن است.

ج ـ گرم، رایج‌ترین یکای اندازه‌گیری جرم در آزمایشگاه بوده و هر واحد از آن، معادل با $۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}\ amu$ است.

د ـ فلوئور، در دمای اتاق به حالت گاز بوده و تنها عنصر از گروه هفدهم است که با نماد یک حرفی نشان داده می‌شود.

۱) «الف» و «ب»
۲) «ب» و «ج»
۳) «ج» و «د»
۴) «الف» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی و محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۰۰۱)

عبارت‌های (ب) و (ج) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) تناوب هفتم جدول دوره‌ای، در ساختار خود ۳۲ عنصر جای داده و به عنصری با عدد اتمی ۱۱۸ ختم می‌شود. این عنصر، معادل با یک گاز نجیب بوده و در گروه ۱۸ قرار می‌گیرد. در واقع عدد اتمی عناصر موجود در تناوب هفتم، در بازه بین ۸۷ تا ۱۱۸ قرار می‌گیرد.

عدد اتمی گازهای نجیب

عدد اتمی گازهای نجیب موجود در انتهای تناوب‌های مختلف به شرح نمودار زیر است:

شماره تناوب	عدد اتمی	گاز نجیب
۱	۲	هلیم
۲	۱۰	نئون
۳	۱۸	آرگون
۴	۳۶	کریپتون
۵	۵۴	زنون
۶	۸۶	رادون
۷	۱۱۸	اوگانسون

ب) سومین عنصر موجود در گروه چهاردهم جدول دوره‌ای، معادل با ژرمانیم بوده و عدد اتمی این عنصر برابر با ۳۲ است. ششمین عنصر موجود در تناوب سوم نیز معادل با گوگرد بوده و عدد اتمی آن برابر با ۱۶ است.

ج) گرم، رایج‌ترین یکای اندازه‌گیری جرم در آزمایشگاه شناخته می‌شود؛ این در حالی است که یکای جرم اتمی (amu)، یکای بسیار کوچکی برای جرم به شمار می‌آید و کار با آن در آزمایشگاه و در عمل، ناممکن است. هر واحد از یکای جرم اتمی (amu)، معادل با $۱/۶۶ \times ۱۰^{-۲۴}$ گرم می‌شود، پس می‌توان گفت هر گرم، معادل با $۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}$ برابر یکای جرم اتمی است.

د) فلوئور، در دمای اتاق به حالت گاز بوده و به شکل مولکول‌های دو اتمی دیده می‌شود. این عنصر در بالاترین خانه گروه شماره ۱۷ جدول دوره‌ای (گروه هالوژن‌ها) قرار گرفته است. توجه داریم که فلوئور، یکی از عناصر گروه هفدهم است که با نماد یک حرفی نشان داده می‌شود. علاوه بر فلوئور، ید نیز عنصری از گروه ۱۷ جدول دوره‌ای است که با نماد یک حرفی مشخص می‌شود.

عناصر با نماد یک‌حرفی

عناصر با نماد یک‌حرفی که در تناوب‌های اول تا چهارم جدول دوره‌ای قرار گرفته‌اند، به شرح نمودار زیر هستند:

عناصر جدول دوره‌ای (عناصری با نماد یک حرفی)			
تناوب اول	تناوب دوم	تناوب سوم	تناوب چهارم
هیدروژن	فلوئور، اکسیژن، نیتروژن، کربن و بور	فسفر و گوگرد	پتاسیم و وانادیم

۹۲- در مخلوطی از گازهای متان و کربن دی‌اکسید، شمار اتم‌های کربن و هیدروژن با هم برابر است. در یک نمونه ۲۹/۶ گرمی از این مخلوط گازی، چند مولکول متان وجود دارد؟ $(O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) $۳/۶۱۲ \times ۱۰^{۲۳}$ ۲) $۲/۴۰۸ \times ۱۰^{۲۳}$ ۳) $۱/۸۰۶ \times ۱۰^{۲۳}$ ۴) $۱/۲۰۴ \times ۱۰^{۲۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۱۸ ـ ۱۰۰۱)

فرمول شیمیایی متان و کربن دی‌اکسید، به ترتیب به‌صورت $CH_۴$ و $CO_۲$ است. طبق فرض سؤال، در مخلوط گازی مورد نظر، شمار اتم‌های کربن و هیدروژن با هم برابر است. فرض می‌کنیم که در این مخلوط، x مول متان و y مول گاز کربن دی‌اکسید داریم. بر این اساس، شمار مول اتم‌های کربن و هیدروژن موجود در این مخلوط را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{هیدروژن} \longrightarrow \text{فقط در متان وجود دارد} \longrightarrow ?\,mol\,H = x\,mol\,CH_۴ \times \frac{۴\,mol\,H}{۱\,mol\,CH_۴} = ۴x\,mol$$

$$\text{کربن} \longrightarrow \text{در هر دو گاز وجود دارد} \longrightarrow \begin{cases} ?\,mol\,C = x\,mol\,CH_۴ \times \dfrac{۱\,mol\,C}{۱\,mol\,CH_۴} = x\,mol \\ ?\,mol\,C = y\,mol\,CO_۲ \times \dfrac{۱\,mol\,C}{۱\,mol\,CO_۲} = y\,mol \end{cases}$$

طبق فرض سؤال، در مخلوط گازی، شمار اتم‌های کربن و هیدروژن با هم برابر است. بر این اساس، داریم:

$$\text{شمار مول‌های اتم هیدروژن} = \text{شمار مول‌های اتم کربن} \Longrightarrow ۴x = x + y \Longrightarrow ۳x = y$$

از طرفی، جرم مخلوط گازی مورد نظر برابر با ۲۹/۶ گرم است. بر این اساس، می‌توانیم مقدار مؤلفه‌های x و y را محاسبه کنیم. در این رابطه، داریم:

$$\text{مخلوط از دو گاز تشکیل شده است} \longrightarrow \begin{cases} ?\,g\,CH_۴ = x\,mol\,CH_۴ \times \dfrac{۱۶\,g\,CH_۴}{۱\,mol\,CH_۴} = ۱۶x\,g \\ ?\,g\,CO_۲ = y\,mol\,CO_۲ \times \dfrac{۴۴\,g\,CO_۲}{۱\,mol\,CO_۲} = ۴۴y\,g \end{cases}$$

بر این اساس، داریم:

$$\text{جرم مخلوط} = CO_۲ \text{ جرم} + CH_۴ \text{ جرم} \Longrightarrow ۲۹/۶ = ۴۴y + ۱۶x$$

تا به اینجای کار، دو معادله و دو مجهول در اختیار داریم. بر این اساس، مقدار مول هر گاز در مخلوط اولیه را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۳x = y \\ ۲۹/۶ = ۴۴y + ۱۶x \end{cases} \Longrightarrow \quad x = ۰/۲ \quad , \quad y = ۰/۶$$

با توجه به محاسبات بالا، در این مخلوط ۰/۲ مول گاز متان وجود داشته است. بر این اساس، تعداد ذرات متان را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,molecule\,CH_۴ = ۰/۲\,mol\,CH_۴ \times \frac{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}\,molecule\,CH_۴}{۱\,mol\,CH_۴} = ۱/۲۰۴ \times ۱۰^{۲۳}\,molecule$$

۹۳- اگر در یون $^{۵۷}A^{۳+}$، شمار نوترون‌ها ۱/۲۵ برابر شمار الکترون‌ها باشد، در یک نمونه ۱۱۴ گرمی از کاتیون $^{۵۷}A^{۲+}$، چند عدد الکترون وجود دارد؟

۱) $۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۴}$ ۲) $۳/۰۱ \times ۱۰^{۲۴}$ ۳) $۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۵}$ ۴) $۳/۰۱ \times ۱۰^{۲۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۹ ـ ۱۰۰۱)

از آنجا که در نماد هر دو یون داده شده از حرف A استفاده شده است، پس این دو یون مربوط به ایزوتوپ‌های عنصر A هستند. اگر شمار الکترون‌ها، پروتون‌ها و نوترون‌های موجود در ایزوتوپ ^{۵۷}A را به ترتیب برابر e، p و n در نظر بگیریم:

$$^{۵۷}A^{۳+} : \begin{cases} p - ۳ = e \\ ۱/۲۵ \times e = n \end{cases} \Longrightarrow ۱/۲۵(p - ۳) = n$$

از طرفی مجموع شمار نوترون‌ها و پروتون‌ها در این یون، برابر با عدد جرمی آن است. معادله دوم را بر اساس عدد جرمی این یون می‌نویسیم. در این رابطه، داریم:

$$n + p = ۵۷$$

سپس دو معادلهٔ حاصل را در یک دستگاه دو معادله و دو مجهول قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} n + p = ۵۷ \\ ۱/۲۵(p - ۳) = n \end{cases} \Longrightarrow \quad n = ۳۰ \quad \text{و} \quad p = ۲۷$$

عنصر A معادل با $_{27}Co$ در جدول تناوبی است. در مرحله بعد، شمار الکترون‌ها را در $^{57}_{27}Co^{2+}$ به‌دست می‌آوریم.

$$\text{تعداد الکترون} = \text{عدد اتمی} - \text{بار الکتریکی} = 27 - 2 = 25$$

بر این اساس، می‌توان گفت در هر یون $^{57}_{27}Co^{2+}$، تعداد ۲۵ الکترون وجود داشته و جرم مولی این ذره نیز برابر با ۵۷ گرم بر مول است. بر این اساس، تعداد الکترون‌ها در یک نمونه ۱۱۴ گرمی از کاتیون A^{2+} را محاسبه می‌کنیم:

$$?\ \text{تعداد}\ e = 114\ g\ Co^{2+} \times \frac{1\ mol\ Co^{2+}}{57\ g\ Co^{2+}} \times \frac{25\ mol\ e}{1\ mol\ Co^{2+}} \times \frac{\text{تعداد}\ e}{1\ mol\ e} = 3/01 \times 10^{25}\ e$$

با توجه به محاسبات انجام شده، در نمونه مورد نظر $3/01 \times 10^{25}$ الکترون وجود دارد.

۹۴- عدد اتمی عنصری که با $_{31}Ga$ در یک گروه مشابه و با $_{56}Ba$ در یک تناوب مشابه قرار گرفته است، چند برابر مجموع عدد اتمی عناصر اولیه سازنده سحابی‌ها است؟

۱) ۳۱ ۲) ۲۵ ۳) ۲۹ ۴) ۲۷

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی و خط‌به‌خط ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۰۰۱)

در قدم اول، باید موقعیت عناصر گالیم و باریم در جدول دوره‌ای را مشخص کنیم. گالیم، قبل از گاز نجیب کریپتون ($_{36}Kr$) قرار گرفته و متعلق به تناوب چهارم است. این عنصر، در گروه شماره ۱۳ قرار گرفته است. باریم نیز قبل از گاز نجیب رادون ($_{86}Rn$) قرار داشته و متعلق به تناوب ششم جدول دوره‌ای است. بر این اساس، می‌توان گفت ما به دنبال عنصری می‌گردیم که متعلق به گروه ۱۳ و تناوب ششم جدول دوره‌ای باشد. تصویر زیر، نمایی از ۶ عنصر موجود در انتهای تناوب ششم را نشان می‌دهد:

۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶
Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn
تالیم	سرب	بیسموت	پولونیم	استاتین	رادون
۲۰۴/۳۰	۲۰۷/۲۰	۲۰۹/۰۰	[۲۰۹]	[۲۱۰]	[۲۲۲]

تالیم با عدد اتمی ۸۱، عنصری است که در ۵ خانه قبل‌تر از گاز نجیب $_{86}Rn$ قرار گرفته و متعلق به گروه شماره ۱۳ جدول تناوبی است. عناصر اولیه سازنده سحابی‌ها، معادل با هیدروژن و هلیم بوده و مجموع عدد اتمی این دو عنصر نیز برابر با ۳ است. بر این اساس، داریم:

$$\frac{\text{عدد اتمی تالیم}}{\text{مجموع عدد اتمی هیدروژن و هلیم}} = \frac{81}{1+2} = 27$$

سحابی‌ها

برخی (نه همه) از دانشمندان، بر این باورند که سرآغاز کیهان با انفجاری مهیب (مهبانگ) همراه بوده که طی آن انرژی آزاد عظیمی آزاد شده است. در آن شرایط، پس از پدید آمدن ذره‌های زیراتمی (الکترون، نوترون و پروتون)، عنصرهای هیدروژن و هلیم پا به عرصه جهان گذاشتند. با گذشت زمان و کاهش دما، گازهای هیدروژن و هلیم تولید شده، متراکم شده و مجموعه‌های گازی به نام سحابی را ایجاد کرد. بعدها این سحابی‌ها سبب پیدایش ستاره‌ها و کهکشان‌ها شدند. روند گفته شده در نمودار زیر نشان داده شده است:

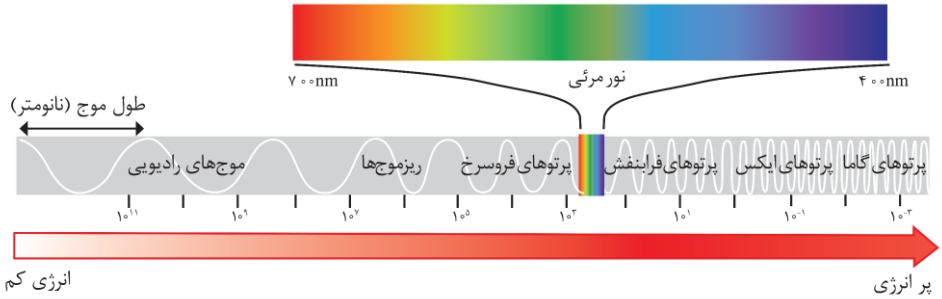
سحابی‌ها سبب پیدایش ستاره و کهکشان و عناصر سنگین شدند ← با گذشت زمان و کاهش دما، گازهای هیدروژن و هلیم متراکم شده و سحابی‌ها پدید آمدند ← تولید عناصر هیدروژن و هلیم ← ذره‌های زیراتمی مانند الکترون، نوترون و پروتون تولید شدند ← در سرآغاز کیهان، طی انفجاری بزرگ (مهبانگ)، انرژی عظیمی آزاد شد

۹۵- کدام‌یک از مطالب زیر، در رابطه با پرتوهای قرمزرنگ مرئی درست است؟

۱) کنترل تلویزیون، پیام‌های خود را با استفاده از این پرتوها به سمت گیرنده ارسال می‌کند.
۲) میزان انحراف این پرتوها در منشور، بیشتر از میزان انحراف پرتوهای آبی‌رنگ در منشور است.
۳) طول موج این پرتوهای مرئی در مقایسه با طول موج پرتوهای نارنجی‌رنگ مرئی کوتاه‌تر است.
۴) نسبت سطح انرژی این پرتوها به ریزموج‌ها، بزرگ‌تر از نسبت سطح انرژی آن‌ها به پرتوهای ایکس است.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی و خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۱ ـ ۱۰۰۱)

نور، تابشی از پرتوهای الکترومغناطیسی به شمار می‌رود. پرتوهای الکترومغناطیسی، شامل طول موج‌های متنوعی از چندین متر تا چند پیکومتر می‌شوند. پرتوهای الکترومغناطیسی با توجه به مقدار طول موج خود، انرژی حمل می‌کنند. مقدار انرژی پرتوهای الکترومغناطیسی با طول موج آن‌ها رابطه عکس دارد. چشم انسان، تنها می‌تواند گستره محدودی از نور را ببیند. به این گستره که رنگ‌های سرخ، نارنجی، زرد، سبز، آبی، نیلی و بنفش را در برمی‌گیرد، **گسترهٔ مرئی** گفته می‌شود. تصویر زیر، نمایی از انواع پرتوهای الکترومغناطیسی را نشان می‌دهد:



سطح انرژی پرتوهای قرمز رنگ مرئی در مقایسه با ریزموج‌ها **بیشتر** و در مقایسه با پرتوهای ایکس **کمتر** است. بر این اساس، می‌توان گفت نسبت سطح انرژی پرتوهای قرمز رنگ به ریزموج‌ها، عددی بزرگ‌تر از یک و نسبت سطح انرژی پرتوهای قرمز رنگ به پرتوهای ایکس، عددی **کوچک‌تر** از یک است، پس مقدار نسبت **اول بزرگ‌تر** از نسبت **دوم** است.

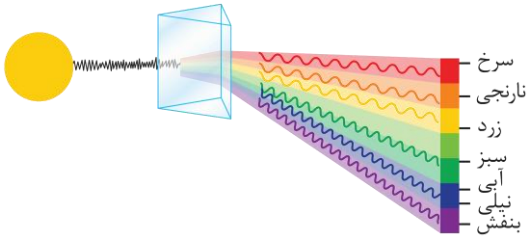
بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) کنترل تلویزیون، سیگنال‌های خود را با استفاده از تاباندن پرتوهای فروسرخ مخابره می‌کند. این پرتوها، متفاوت از پرتوهای مرئی قرمز رنگ بوده و سطح انرژی **پایین‌تری** دارند.

کاربردهای نور

به دلیل اینکه خورشید و دیگر اجرام آسمانی از ما بسیار دور هستند، ویژگی‌های آن‌ها را نمی‌توان به‌طور مستقیم اندازه‌گیری کرد. همچنین دمای اجسام بسیار داغ را نمی‌توان با دماسنج تعیین کرد؛ زیرا دماسنج در این دماها ذوب می‌شود. در چنین شرایطی، با استفاده از نور، می‌توان دمای خورشید و دمای شعله‌های بسیار داغ را تعیین کرد. هرچقدر که دمای یک جسم بالاتر باشد، پرتوهای نوری با طول موج کوتاه‌تر و انرژی بیشتر از آن جسم گسیل می‌شود. توجه داریم، نوری که از ستاره یا سیاره‌ای به ما می‌رسد، نشان می‌دهد که آن ستاره یا سیاره از چه ساخته شده و دمای سطحی آن چقدر است.

۲) پرتوهای مرئی نور، در هنگام عبور از منشور دچار شکست می‌شوند. هرچه انرژی یک پرتو بیشتر باشد، میزان انحراف آن در منشور نیز بیشتر خواهد بود. به عبارت دیگر، میزان انحراف پرتوها در منشور، با انرژی آن‌ها رابطه مستقیم دارد. مطابق شکل زیر با کاهش طول موج (افزایش انرژی) پرتوها، زاویهٔ انحراف آن‌ها پس از عبور از منشور، افزایش پیدا می‌کند:



با توجه به توضیحات داده شده، میزان انحراف پرتوهای قرمز رنگ در منشور، **کمتر** از میزان انحراف پرتوهای آبی‌رنگ در منشور است.

نور خورشید

نور خورشید، اگرچه سفید به نظر می‌رسد اما با عبور از یک منشور و یا قطره‌های آب موجود در هوا، تجزیه شده و گستره‌ای پیوسته از رنگ‌ها را ایجاد می‌کند. این گستره رنگی، شامل بی‌نهایت طول موج از رنگ‌های گوناگون می‌شود. بررسی‌ها نشان می‌دهد که نور خورشید، شامل گستره بسیار بزرگ‌تری از این پرتوها است. پرتوهایی که از نوع پرتوهای الکترومغناطیسی بوده و با خود انرژی حمل می‌کنند؛ به‌طوری‌که هر چه طول‌موج این پرتوها کوتاه‌تر باشد، انرژی بیشتری با خود حمل می‌کنند. توجه داریم که میزان انحراف پرتوهای الکترومغناطیسی در منشور، با طول موج این پرتوها رابطه وارونه دارد.

۳) طول موج پرتوهای مرئی **قرمز** رنگ در مقایسه با طول موج **پرتوهای نارنجی‌رنگ مرئی بلندتر** است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تیپ‌شناسی سؤالات شیمی کنکور

به‌طور کلی، سؤالات شیمی کنکور را به‌صورت زیر می‌توان دسته‌بندی کرد:

انواع سؤالات شیمی کنکور

سؤالات مسئله	سؤالات مفهومی	سؤالات حفظی

یکی از مهم‌ترین و چالشی‌ترین بخش‌ها از سؤالات درس شیمی در کنکور سراسری، سؤالاتی است که در حیطه مسائل مطرح می‌شوند. در کنکور چند سال اخیر، در حدود ۵۰ درصد سؤالات شیمی کنکور از حیطه مسائل مطرح شده و این بخش، از جمله بخش‌های بسیار تأثیرگذار بر نتیجه نهایی داوطلبان کنکور بوده است. مهم‌ترین تیترهای مسائل شیمی کنکور و فصلی از کتاب درسی که سؤالات مورد نظر از آن طراحی می‌شوند، به شرح زیر است:



حیطه‌های اصلی مسائل شیمی کنکور

مسائل تعادل	مسائل اسید و باز	مسائل سینتیک	مسائل ترمودینامیک (ترموشیمی)	مسائل شیمی آلی	مسائل غلظت و انحلال‌پذیری محلول	استوکیومتری
فصل ۱ و ۴ دوازدهم	فصل ۱ دوازدهم	فصل ۲ یازدهم	فصل ۲ یازدهم	فصل ۱، ۲ و ۳ یازدهم	فصل ۳ دهم	فصل ۲ دهم و فصل ۱ یازدهم

در سایر فصل‌های کتاب درسی، مسائل پراکنده‌ای وجود دارند که سهم کمتری از سؤالات کنکور را به خود اختصاص می‌دهند. برای حل مسائل شیمی کنکور و گرفتن درصد بالا از این حیطه، باید چند مرحله مهم در ذهن شما به‌صورت زنجیره‌وار انجام شود. این مراحل، به شرح زیر هستند:

۱) مطالعه درست متن (صورت) سؤال

۲) تحلیل اطلاعات ارائه‌شده در صورت سؤال

۳) پیدا کردن مبحثی که سؤال مربوط به آن است

۴) چیدن استراتژی درست برای حل سؤال

۵) نوشتن معادله واکنش‌های مورد نیاز برای حل سؤال

۶) انجام مراحل محاسباتی برای حل سؤال

برای مثال، فرض کنید در یک سؤال بسیار ساده، به شما گفته شده که در واکنش سوختن کامل مقداری از گاز متان، ۳۲ گرم گاز اکسیژن مصرف شده و در نهایت، جرم گاز کربن دی‌اکسید تولید شده در این واکنش از شما خواسته شده است. بعد از مطالعه متن سؤال، باید اطلاعات داده شده را تحلیل کرده و اطلاعات خواسته شده را مشخص کنید. برای مثال، در رابطه با این سؤال داریم:

جرم گاز کربن دی‌اکسید تولید شده: اطلاعات خواسته شده

جرم اکسیژن مصرف شده: اطلاعات داده شده

با توجه به اطلاعات داده شده و خواسته شده در این سؤال، متوجه می‌شویم که این سؤال مربوط به مبحث استوکیومتری بوده و متعلق به تیپ جرمی-جرمی است. در سؤالات مربوط به این تیپ، ابتدا باید جرم ماده داده شده را به مول تبدیل کرده و پس از تبدیل مول مواد به یکدیگر، مقدار مول ماده تولید شده را به جرم آن تبدیل کنیم. معادله واکنش انجام شده به‌صورت زیر است:

$$CH_۴(g) + ۲O_۲(g) \rightarrow CO_۲(g) + ۲H_۲O(l)$$

با توجه به معادله این واکنش، استراتژی مربوط به حل سؤال را مشخص کرده و به‌صورت زیر می‌نویسیم:

جرم کربن‌دی‌اکسید $\xrightarrow{\text{ضرب در جرم مولی } CO_۲}$ مول کربن‌دی‌اکسید $\xrightarrow{\text{نسبت بین ضرایب}}$ مول اکسیژن $\xrightarrow{\text{تقسیم بر جرم مولی اکسیژن}}$ جرم اکسیژن

با استفاده از استراتژی بالا، سؤال مورد نظر به سادگی قابل حل خواهد بود. در قدم آخر، با توجه به استراتژی چیده شده برای حل سؤال مورد نظر، محاسبات عددی خود را انجام می‌دهیم. برای مثال، مراحل حل سؤال گفته شده به‌صورت زیر است:

$$۳۲\ g\ O_۲ \xrightarrow{\div ۳۲} ۱\ mol\ O_۲ \xrightarrow{\times \frac{۱}{۲}} ۰/۵\ mol\ CO_۲ \xrightarrow{\times ۴۴} ۲۲\ g\ CO_۲$$

پس از مشخص کردن استراتژی حل سؤال، حتی با استفاده از روش ضریب تبدیل نیز می‌توان مقدار نهایی را محاسبه کرد. هر مرحله از استراتژی بالا، با استفاده از یک کسر تبدیل نیز قابل محاسبه خواهد بود. برای مثال، داریم:

$$?\ g\ CO_۲ = ۳۲\ g\ O_۲ \times \frac{۱\ mol\ O_۲}{۳۲\ g\ O_۲} \times \frac{۱\ mol\ CO_۲}{۲\ mol\ O_۲} \times \frac{۴۴\ g\ CO_۲}{۱\ mol\ CO_۲} = ۲۲\ g$$

برای حل همان سؤال به روش تناسب یا کسر پیش‌ساخته، داریم:

$$\frac{\text{جرم اکسیژن}}{\text{ضریب} \times \text{جرم مولی}} = \frac{\text{جرم کربن دی‌اکسید}}{\text{ضریب} \times \text{جرم مولی}} \Longrightarrow \frac{۳۲\ g\ O_۲}{۳۲\times۲} = \frac{x\ g\ CO_۲}{۴۴\times۱} \Longrightarrow x = ۲۲\ g$$

مراحل طی شده برای حل هر مسئله را به‌طور خلاصه می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:

یافتن معادله واکنش‌ها	چیدن استراتژی برای حل سؤال	مطالعه متن سؤال
انجام مراحل محاسباتی	تشخیص تیپ سؤال	تشخیص مبحث سؤال
یافتن پاسخ نهایی سؤال	پیدا کردن خواسته‌های سؤال	پیدا کردن داده‌های سؤال

توجه داشته باشید که اگر استراتژی حل یک سؤال را به‌درستی درک کنید، برای حل مسائل شیمی دیگر درگیر انتخاب روش‌های مختلف از جمله تناسب، ضریب تبدیل، الگوریتمی و ... نبوده و مراحل حل هر سؤالی را به سادگی درک خواهید کرد. البته، دقت داشته باشید که برای حل سؤالات امتحان نهایی، فقط باید از روش ضریب تبدیل (زنجیره‌ای) استفاده کنید!

در دیجی ماز

آرشیو آزمون های ماز سال های اخیر

به همراه پاسخنامه تشریحی



اسکن کن!

برای دریافت کلیک کن!

DIGIMAZE.ORG

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir